To je mestoma nekoliko razširjen povzetek predavanj iz predmeta analiza 1 za študente IŠRM. Gre za nerecenzirano delo, ki je nedvomno potrebno popravkov. Za opozorila na napake (tudi pravopisne in tipkarske) se vnaprej zahvaljujem.

Januar 2021

Bojan Magajna

ANALIZA 1

Kazalo

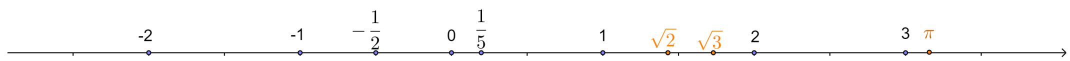
1. Realna števila

Racionalna števila, ki jih predstavimo z ulomki, so ljudje poznali že pred tisočletji. Stari grki so dolgo časa menili, da lahko vse razdalje natančno izrazimo z racionalnimi števili. Že kmalu po obdobju Pitagore (okrog 5 stoletij pred našim štetjem) pa so ugotovili, da dolžina diagonale kvadrata s stranico 1 ne more biti racionalno število. Dolžina diagonale je namreč $\sqrt{2}$ in, če bi bilo to racionalno število, bi ga lahko izrazili kot okrajšani ulomek

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

kjer bi bili p in q tuji naravni števili. Od tod bi potem dobili $p^2 = 2q^2$, iz česar bi sledilo, da mora biti p sodo število, saj je kvadrat lihega štivala lih, p^2 pa sodo (ker je enako $2q^2$). Torej je $p = 2p_1$ za kako naravno število p_1. Ko vstavimo to v enakost $p^2 = 2q^2$, dobimo $4p_1^2 = 2q^2$, torej $q^2 = 2p_1^2$. Od tod enak sklep pove, da mora biti q sodo število. Toda potem imata p in q skupni delitelj 2, kar je protislovje, saj smo vzeli, da sta p in q tuji števili. Dolžina diagonale kvadrata s stranico 1 torej ne more biti racionalno število, zato za natančno predstavljanje dolžin racionalna števila ne zadoščajo. Vpeljati moramo večjo množico števil, namreč množico realnih števil $\mathbb{R}$.

Realna števila si lahko zamišljamo kot točke na premici, na kateri sedijo v enakomernih razmikih ene enote vsa cela števila $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$, pri čemer so pozitivna desno, negativna pa levo od 0. Med njimi so v primernih razmikih vsa racionalna števila; npr. $1/2$ je točno na sredini med 0 in 1, $1/3$ je na tretjini razdalje med 0 in 1 itd. Ko smo tako na premico razporedili vsa racionalna števila, pa s tem nismo zasedli vseh točk na premici. Npr. točke, ki je od 0 oddaljena $\sqrt{2}$, nismo zasedli, ker $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Nezasedene točke ustrezajo *iracionalnim številom*. Množico vseh racionalnih števil označimo s $\mathbb{Q}$; njen komplement v $\mathbb{R}$ pa z $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Obe množici, $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, sta neskončni, vendar se izkaže, da ima $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vseeno mnogo več elementov. $\mathbb{Q}$ vsebuje kot svojo podmnožico množico $\mathbb{Z}$ vseh celih števil, le ta pa množico $\mathbb{N}$ vseh naravnih števil. Čeprav se zdi nenavadno, celih števil ni več kot



Slika 1. Realna os

naravnih, saj jih lahko razporedimo v pare z naravnimi števili na naslednji način: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,2)$, $(2,3)$, $(-2,4)$, $(-3,5)$, $(3,6)\ldots$. Tudi racionalnih števil ni več kot naravnih; dokaz bomo pustili kot nalogo, tukaj bomo pokazali le, kako lahko pozitivna racionalna števila preštejemo (tj. razporedimo v pare z naravnimi). Najprej napišemo vse pozitivne ulomke v tabelo in sicer tako, da so v prvi vrsti vsi ulomki z imenovalcem 1, v drugi vrsti vsi ulomki z imenovalcem 2, v tretji vsi ulomki z imenovalcem 3 itd. Nato te ulomke oštevilčimo z naravnimi števili, kot nakazujejo puščice (in pri tem lahko izpuščamo tiste ulomke, ki so bili na vrsti že prej).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \to & 2 & & 3 & \to & 4 & & 5 & \to & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \ldots \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \ldots \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \ldots \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \ldots \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \ldots \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Vsak pozitiven ulomek je napisan nekje v tej tabeli. Ko tabelo razvijemo v ravno črto, kot nakazujejo puščice, dobimo vse te ulomke zapisane v eno samo zaporedje, zato jih ne more biti več kot naravnih števil.

Iz načina, kako izračunamo decimalni zapis ulomka p/q, in dejstva, da je pri deljenju s q možnih le končno mnogo različnih ostankov, sledi (kot je znano iz srednje šole), da se v decimalnem zapisu ulomka od nekje naprej neka skupina cifer ponavlja. Tudi obratno je res: če se v decimalnem zapisu od nekega mesta naprej kaka skupina cifer ponavlja, predstavlja ta zapis racionalno število. Namesto splošnega dokaza, si oglejmo konkreten primer, saj je na njegovi podlagi mogoče zlahka izdelati splošen dokaz.

Zgled 1.1. Da bi ugotovili, da predstavlja zapis $3.1141414... = 3.1 + 0.0141414\ldots$ racionalno število, zadošča to ugotoviti za zapis $0.0141414\ldots$, saj je $3.1 = 31/10$ racionalno število. Označimo

$$x = 0.0141414\ldots$$

in pomnožimo to enakost s 100, da dobimo

$$100x = 1.4141414\ldots = 1.4 + x.$$

Od tod sledi $99x = 1.4 = 14/10$, torej je $x = 14/990 = 7/495$.

Iracionalna števila so torej predstavljena s takimi decimalnimi zapisi, da se v njih nobena skupina cifer ne ponavlja. Od tod lahko sklepamo, da se vseh realnih števil med 0 in 1 ne da vključiti v eno samo zaporedje. Predpostavimo namreč, da bi se to dalo, in naj bodo

$$a_1 = 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots,\ a_2 = 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots,\ a_3 = 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3},\ \ldots$$

decimalni zapisi vseh členov tega zaporedja. Sedaj pa sestavimo decimalni zapis $0.b_1b_2b_3\ldots$ takole: b_1 izberimo tako, da bo $b_1 \neq a_{1,1}$ in potem $b \neq a_1$ (ne glede na to, kaj bodo ostale decimalke $b_2, b_3\ldots$); nato izberimo b_2 tako da bo $b_2 \neq a_{2,2}$ in $b \neq a_2$; b_3 izberimo različen od $a_{3,3}$.... Na ta način dobimo realno število b, ki se razlikuje od vseh a_j v našem zaporedju. Dodamo ga sicer lahko našemu zaporedju, toda potem lahko po istem postopku sestavimo novo število, ki ga ne bo v zaporedju. Zato nobeno zaporedje ne more vsebovati vseh realnih števil.

Ključne lastnosti množice realnih števil so zajete v nekaj aksiomih (ki jih tukaj ne bomo našteli), iz katerih izpeljujemo vse druge lastnosti. Ti aksiomi govorijo o lastnostih računskih operacij seštevanja in množenja (kot so asociativnost, komutativnost, distributivnost), lastnostih relacije "manjši", označene kot $<$, ter povezavi med operacijama in relacijo. Vse te lastnosti so dobro znane iz srednje šole. Navedli bomo le enega od aksiomov, ki bo ključen za našo nadajnjo obravnavo, in po katerem se množica $\mathbb{R}$ bistveno razlikuje od svoje podmnožice $\mathbb{Q}$.

Definicija 1.2. Podmnožica S v $\mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$x \leq M \quad \forall x \in S.$$

(Pri tem znak $\forall$ pomeni "za vsak".) Vsak tak M imenujemo *zgornja meja* množice S. Najmanjšo med zgornjimi mejami imenujemo *natančna zgornja meja* ali *supremum* in označimo kot $\sup S$.

Podmnožica $S \subseteq \mathbb{R}$ je *navzdol omejena*, če obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, da je

$$x \geq m \quad \forall x \in S.$$

Vsak tak m imenujemo *spodnja meja množice* S. Največjo med spodnjimi mejami imenujemo *natančna spodnja meja* ali *infimum* in označimo kot $\inf S$.

Množica S je *omejena*, če je omejena navzgor in navzdol.

Zgled 1.3. Množica naravnih števil $\mathbb{N}$ na primer je navzdol omejena, $\inf \mathbb{N} = 0$, navzgor pa ni omejena. Vsak interval $S = (a, b)$ je omejena množica in sicer je $\inf S = a$ in $\sup S = b$. Opazimo, da tukaj $\inf S \notin S$ in $\sup S \notin S$.

Tudi vsak zaprt interval $[a, b]$ je omejena množica in spet je $\inf S = a$ ter $\sup S = b$, le da sta tokrat infimum in supremum elementa množice S.

Poltraki, so omejeni le z ene strani.

Absolutna vrednost realnega števila x je definirana z

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{če je } x \geq 0; \\ -x, & \text{če je } x < 0. \end{cases}$$

Naloge. 1. Za dano množico $S \subseteq \mathbb{R}$ označimo $-S = \{-x : x \in S\}$. ($-S$ je torej zrcalna slika množice S glede na točko 0.) Pokažite, da je S navzgor omejena natanko tedaj, ko je $-S$ navzdol omejena in da velja $\inf(-S) = -\sup S$. Prav tako pokažite, da je S navzdol omejena natanko tedaj, ko je $-S$ navzgor omejena in $\sup(-S) = -\inf S$.

2. Za podmnožico S v $\mathbb{R}$ naj bo $\tilde{S} = \{|x| : x \in S\}$. Pokažite, da je S omejena natanko tedaj, ko je $\tilde{S}$ navzgor omejena.

3. Pokažite (tako da obravnavate vse možnosti predznakov števil a in b), da je $|ab| = |a||b|$ in $|a + b| \leq |a| + |b|$ za poljubni realni števili a in b.

Ključen je naslednji *aksiom o polnosti*, imenovan tudi *aksiom o kontinuumu.*

Aksiom o kontinuumu. *Za vsako neprazno navzgor omejeno podmnožico S v $\mathbb{R}$ obstaja v $\mathbb{R}$ njen supremum.*

Ta aksiom postane evidenten, če si predstavljamo realna števila kot točke na premici, saj je premica neprekinjena (je kontinuum), nima lukenj. Tak aksiom ne velja v $\mathbb{Q}$; nima namreč vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica S v $\mathbb{Q}$ supremuma v $\mathbb{Q}$.

Zgled 1.4. Naj bo

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < \sqrt{2}\}.$$

Ta množica je navzgor omejena npr. z 2, njen supremum v $\mathbb{R}$ je $\sqrt{2}$, ki pa ni v $\mathbb{Q}$. Nobeno število $M \in \mathbb{Q}$ ne more biti supremum množice S, kajti tak M bi bil zgornja meja za S tudi v $\mathbb{R}$ in zato $\sqrt{2} \leq M$ (saj je $\sqrt{2}$ najmanjša med zgornjimi mejami za S v $\mathbb{R}$). Ker $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, mora biti potem $\sqrt{2} < M$. Toda med $\sqrt{2}$ in M obstaja racionalno število, imenujmo ga r. (Dobimo ga npr. tako, da v decimalnem zapisu za $\sqrt{2}$ dovolj pozno decimalko povečamo za 1, poznejše decimalke pa nadomestimo z ničlami. Če smo izbrali dovolj pozno decimalko, smo s tem $\sqrt{2}$ le tako malo povečali, da bo dobljeno število še vedno manjše od M.) Ker je $\sqrt{2} < r$, je r zgornja meja za S v $\mathbb{Q}$. Ker je $r < M$, torej M ne more biti najmanjša zgornja meja v $\mathbb{Q}$.

Ker lahko z zrcaljenjem množice prek 0 spremenimo spodnje meje v zgornje, velja naslednja trditev, katere dokaz bomo pustili za vajo:

Trditev 1.5. *Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica v $\mathbb{R}$ ima infimum v $\mathbb{R}$.*

Realna števila se da konstruirati, brez sklicevanja na premico, njihove lastnosti pa dokazovati le na podlagi aksiomov. Dokazati je treba na primer tudi obstoj korenov pozitivnih realnih števil, tj., da za vsako naravno število n in vsak pozitiven $a \in \mathbb{R}$ obstaja tak pozitiven $x \in \mathbb{R}$, da je $x^n = a$. Namesto v splošnem, bomo to pokazali v posebnem primeru $a = 2$ in $n = 5$; splošen dokaz je podoben temu, ki ga bomo navedli v naslednjem zgledu:

Zgled 1.6. Obstaja tako pozitivno realno število M, da je $M^5 = 2$.

Za dokaz si oglejmo množico

$$S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x,\ x^5 < 2\},$$

ki ni prazna, saj je $1 \in S$. Ta množica je tudi navzgor omejena, npr. z 2, saj so vsa pozitivna števila x, ki zadoščajo pogoju $x^5 < 2$, manjša od 2. (Če je namreč $x \geq 2$, je $x^5 \geq 32 > 2$.) Po aksiomu o kontinuumu obstaja $M := \sup S$. Trdimo, da je $M^5 = 2$. V nasprotnem primeru bi bilo namreč bodisi $M^5 < 2$ bodisi $M^5 > 2$, pokazali pa bomo, da obe ti dve možnosti vodita v protislovje.

Če je $M^5 < 2$, potem je, kot bomo videli, tudi $(M+\varepsilon)^5 < 2$ za kak dovolj majhen pozitiven ε. Toda to pomeni, da je $M + \varepsilon \in S$, se pravi $M + \varepsilon \leq M$ (ker je M zgornja meja za S), kar je protislovje, saj je očitno $M + \varepsilon > M$. Poiskati moramo torej tak $\varepsilon > 0$, da bo $(M + \varepsilon)^5 < 2$. Tak ε bomo poiskali med števili, manjšimi od 1, tako, da lahko ocenimo

$$(M+\varepsilon)^5 = M^5+5M^4\varepsilon+\binom{5}{2}M^3\varepsilon^2+\ldots\varepsilon^5 = M^5+\varepsilon\left(5M^4+\binom{5}{2}M^3\varepsilon+\ldots+\varepsilon^4\right)$$
$$< M^5 + \varepsilon\left(5M^4 + \binom{5}{2}M^3 + \ldots + 1\right).$$

Zadnji izraz bo manjši od 2, če izberemo ε manjši od

$$\frac{2 - M^5}{\left(5M^4 + \binom{5}{2}M^3 + \ldots + 1\right)}.$$

Če pa je $M^5 > 2$, potem je tudi $(M - \varepsilon)^5 > 2$ za kak dovolj majhen pozitiven ε, ki ga lahko izberemo manjšega od 1, saj velja ocena

$$(M - \varepsilon)^5 = M^5 - 5M^4\varepsilon^2 + \binom{5}{2}M^3\varepsilon^2 - \ldots + \varepsilon^4$$
$$> M^5 - \varepsilon\left(5M^4 + \binom{5}{2}M^3 + \ldots + 1\right) > 2,$$

če izberemo ε manjši od

$$\frac{M^5 - 2}{\left(5M^4 + \binom{5}{2}M^3 + \ldots + 1\right)}.$$

Toda iz neenakost $(M - \varepsilon)^5 > 2$ sledi, da je $M - \varepsilon > x$ za vsak $x \in S$, če izberemo ε manjši tudi od M, kot pove naslednji račun, kjer smo označili $y = M - \varepsilon$:

$$0 < y^5 - x^5 = (y - x)(y^4 + y^3x + \ldots + x^4).$$

Ker so namreč v zadnjem oklepaju sami pozitivni členi, iz te neenakosti sledi (ko jo delimo z izrazom v oklepaju), da je $0 < y - x$, torej res $y > x$. To pove, da je y

zgornaj meja množice S. Toda $y = M - \varepsilon < M$, kar je v protislovju s tem, da je M najmanjša med zgornjimi mejami za S.

Naloge. 1. Dokažite, da vsak (še tako kratek) odprt interval vsebuje kako racionalno število.

2. (i) Dokažite, da za vsako naravno število $q \geq 1$ in vsako realno število x obstaja tako celo število p, da je $|x - \frac{p}{q}| < 1$.

(ii)* Dokažite, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ in vsak pozitiven ε obstaja tak ulomek p/q $(p, q \in \mathbb{Z})$, da je $|x - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$.

3.* Dokažite, da za vsako pokritje zaprtega intervala $[a, b]$ z odprtimi intervali (a_j, b_j) (torej $[a, b] \subseteq \cup_j (a_j, b_j)$, kjer je intervalov neskončno mnogo), obstaja med temi intervali končno mnogo takih, da njihova unija vsebuje $[a, b]$. (Navodilo: Opazujte množico vseh tistih $c \in [a, b]$, za katere je mogoče interval $[a, c]$ pokriti s končno mnogo intervali (a_j, b_j) in uporabite aksiom o kontinuumu.)

2. Kompleksna števila

Točka T v ravnini je določena z dvema koordinatama oziroma z vektorjem, ki se začne v koordinatnem izhodišču 0 in konča v T. Ker vektor $\vec{0T}$ in točka dasta isto informacijo, ju v pogovoru ni nujno razlikovati. Tako bomo pisali kar $\vec{0T} = (x, y)$, kjer sta x in y koordinati točke T. Da nam ne bo treba pisati puščic, bomo v tem razdelku vektorje raje označevali z grški črkami. Vektorje lahko seštevamo, kot je znano že iz srednje šole:

$$\text{če je } \alpha = (a, b) \text{ in } \beta = (c, d), \text{ je } \alpha + \beta = (a + c, b + d). \tag{2.1}$$

Vektor, ki se konča v točki 1 na abscisni osi (začne pa v izhodišču, kot vsi vektorji v tem razdelku), bomo označili kar z 1. S tem smo torej izenačili v oznakah 1 in par $(1, 0)$. Vektor $(0, 1)$, ki se konča v točki 1 na ordinatni osi, pa bomo imenovali i. Vsak vektor $\alpha = (a, b)$ potem lahko razstavimo kot

$$\alpha = a + bi.$$

Ali je možno te ravninske vektorje množiti med seboj na tak način, da veljajo pri računanju z njimi običajne lastnosti? Pri tem imamo v mislih, da veljajo asociativnost, komutativnost in distributivnost ter da je mogoče deliti z vsaki vektorjem α, različnim od 0. Nadalje bi želeli, da je $i^2 = -1$, kjer je $i^2 = ii$.

Zadnjo lastnost želimo zato, ker v realnih številih enačba $x^2 = -1$ ni rešljiva, saj kvadrat realnega števila ni nikoli negativen (tudi, če je število samo negativno). Tako enačbo pa je pomembno znati rešiti, saj nastopajo koreni iz negativnih realnih števil pri reševanju enačb višjih stopenj. Npr. funkcija $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, kjer so a, b in c fiksna realnaštevila, je za zelo velike pozitivne x pozitivna (ker prevlada člen x^3, za po absolutni vrednosti velike negativne x pa je negativna. Ker je njen graf nepretrgana krivulja, mora nekje sekati abscisno os, kar pomeni, da ima enačba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ vsaj eno rešitev $x \in \mathbb{R}$. Toda izkaže se, da v formuli za rešitev take enačbe lahko nastopajo koreni negativnih realnih števil, čeprav je končen rezultat realno število.

Od vektorja i torej pričakujemo, da bo igral vlogo $\sqrt{-1}$. Ker želimo ohraniti običajne lastnosti računskih operacij, je edina možnost za produkt dveh vektorjev $\alpha = a + bi$ in $\beta = c + di$ naslednja:

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Lahko je preveriti, da ima množenje, definirano s tem predpisom, torej

$$\alpha\beta = ac - bd + (ad + bc)i, \tag{2.2}$$

običajne lastnosti: je komutativno (tj. $\beta\alpha = \alpha\beta$), asociativno (tj. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ in distributivno glede na seštevanje (tj. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\beta + \alpha\gamma$). Ravninske vektorje (oziroma točke v ravnini) bomo odslej imenovali kar *kompleksna števila*, kadar bomo imeli v mislih, da jih lahko množimo po pravilu (2.2). Množico vseh kompleksnih števil bomo označevali z $\mathbb{C}$. Za kompleksno število $\alpha = a + bi$ (kjer je $a, b \in \mathbb{R}$) imenujemo a njegov *realni del* ali *realna komponenta*, b pa *imaginarna komponenta*, kar bomo zapisali kot

$$a = \operatorname{Re}\alpha, \quad b = \operatorname{Im}\alpha.$$

Oglejmo si produkt števila $\alpha = a + bi$ s *konjugiranim številom* $\overline{\alpha}$, ki je definirano kot

$$\overline{\alpha} = a - bi \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

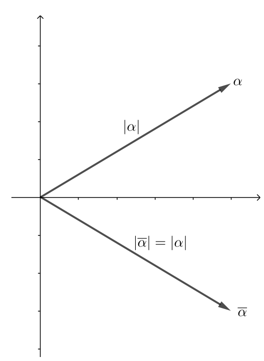
Po formuli (2.2) imamo

$$\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 = |\alpha|^2, \tag{2.3}$$

kjer smo označili z

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

absolutno vrednost kompleksnega števila α. Geometrijsko absolutna vrednost pomeni dolžino vektorja α, konjugirano število α pa je zrcalna slika točke α prek abscisne osi. Če je $\alpha \neq 0$, je $|\alpha| \neq 0$ in enakost (2.3) lahko napišemo kot



Slika 2. Absolutna vrednost in konjugirano število

$$\alpha\frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2} = 1,$$

kar pomeni, da je

$$\alpha^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2},$$

inverz kompleksnega števila α. To pove, kako delimo kompleksna števila:

$$\frac{\beta}{\alpha} := \beta\alpha^{-1} = \frac{\beta\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}.$$

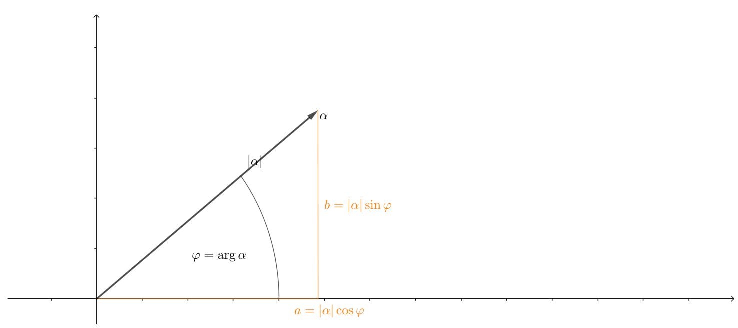
Zgled 2.1.

$$\frac{2-3i}{3+4i} = \frac{(2-3i)(3-4i)}{3^2+4^2} = \frac{-6-17i}{25}.$$

Naloga. Pokažite, da je

$$\operatorname{Re}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha}) \quad \text{in} \quad b = \frac{1}{2i}(\alpha - \overline{\alpha}).$$

Kompleksno število $\alpha = a + bi \neq 0$ je popolnoma določeno s svojo absolutno vrednostjo in kotom $\arg\alpha$, ki ga vektor α oklepa s pozitivnim poltrakom osi x. Ta



Slika 3. Argument kompleksnega števila

kot imenujemo *argument števila* α in ga bomo krajše označevali s $\varphi, \psi, \ldots$. Njegove vrednosti so v intervalu $[0, 2\pi)$. Očitno je

$$\operatorname{Re}\alpha = |\alpha|\cos\varphi \quad \text{in} \quad \operatorname{Im}\alpha = |\alpha|\sin\varphi,$$

torej

$$\alpha = |\alpha|\cos\varphi + i|\alpha|\sin\varphi = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Definicija 2.2. Zapis

$$\alpha = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2.4}$$

imenujemo *polarni zapis* kompleksnega števila α.

Opazimo, da ima pri tem število $\cos\varphi + i\sin\varphi$ vedno absolutno vrednost 1, saj je $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Kompleksna števila z absolutno vrednostjo 1 ležijo v razdalji 1 od izhodišča in tako tvorijo krožnico s središčem 0 in polmerome 1, ki jo imenujemo *enotska krožnica* in označimo s $\mathbb{T}$ (ali pa z $\mathbb{S}^1$).

Iz polarnega zapisa je lažje razbrati, kaj se geometrijsko zgodi, ko pomnožimo dve kompleksni števili. Če sta namreč $\alpha = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $\beta = |\beta|(\cos\psi + i\sin\psi)$ polarna zapisa, imamo

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= |\alpha||\beta|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)\\ &= |\alpha||\beta|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)),\end{aligned}$$

torej po adicijskih formulah za funkciji sinus in kosinus,

$$\alpha\beta = |\alpha||\beta|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \tag{2.5}$$

To je polarni zapis produkta, od koder vidimo, da je

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \text{ in } \quad \arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta \quad \mod 2\pi.$$

Če uporabimo formulo (2.5) v primeru $\beta = \alpha$, dobimo

$$\alpha^2 = |\alpha|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Če jo nato uporabimo za α in $\beta = \alpha^2$, dobimo $\alpha^3 = |\alpha|^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$. Z indukcijo lahko na ta način dokažemo, da je

$$\alpha^n = |\alpha|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{2.6}$$

za vsako naravno število n. To formulo imenujemo *Moivrejeva formula.* Pokažmo, da velja tudi za -1 namesto n, če je $\alpha \neq 0$. Pokazati želimo torej, da je $\alpha^{-1} = |\alpha|^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin-\varphi)$, kar pomeni, da se moramo prepričati, ali je produkt števil $|\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $|\alpha|^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ res enak 1. Toda to sledi takoj z uporabo formule (2.5).

Negativno celo število m lahko izrazimo kot $m = -n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Potem je $\alpha^m = (\alpha^{-1})^n$ (kjer smo privzeli, da je $\alpha \neq 0$), zato po Moivrovi formuli za n in za -1

$$\begin{aligned}\alpha^m = [|\alpha|^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))]^n &= |\alpha|^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi))\\ &= |\alpha|^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).\end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da velja Moivrova formula tudi za negativna cela števila.

2.1. **Kako pa je z obstojem korenov?** Za kompleksno število $\alpha \neq 0$ in naravno število n iščemo tak $\beta \in \mathbb{C}$, da bo $\beta^n = \alpha$. Ko napišemo α in (neznani) β v polarni obliki, $\alpha = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $\beta = |\beta|(\cos\psi + i\sin\psi)$, sledi po Moivrovi formuli

$$|\beta|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Absolutni vrednosti na levi in desni strani te enakosti se morata ujemati, torej $|\beta|^n = |\alpha|$ in zato

$$|\beta| = \sqrt[n]{|\alpha|}.$$

Argumenta pa se lahko razlikujeta za celi večkratnik kota 2π, saj imata dva kota isti cosinus in isti sinus natanko tedaj, ko je njuna razlika $k2\pi$ za kak $k \in \mathbb{Z}$. Torej je $n\psi = \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se pravi

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pri tem zadošča, da k teče le po naravnih številih od 0 do $n-1$, saj npr. kot $n\frac{2\pi}{n} = 2\pi$ da isto točko kot 0. V splošnem dva kota $\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ in $\frac{\varphi}{n} + \ell\frac{2\pi}{n}$ pripeljeta do istega rezultata natanko tedaj, ko je njuna razlika cel mnogokratnik od 2π, torej $\frac{k-\ell}{n}$ celo število, kar pomeni, da imata k in ℓ enak ostanek pri deljenju z n. Tako dobimo torej natanko n različnih n-tih korenov števila $\alpha \neq 0$:

$$\sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n})+i\sin(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n})\right), \quad k=0,\ldots,n-1.$$

V posebnem primeru, ko je $\alpha = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ dobimo tako n-te korene enote:

$$\cos(k\frac{2\pi}{n})+i\sin(k\frac{2\pi}{n}), \quad k=0,\ldots,n-1.$$

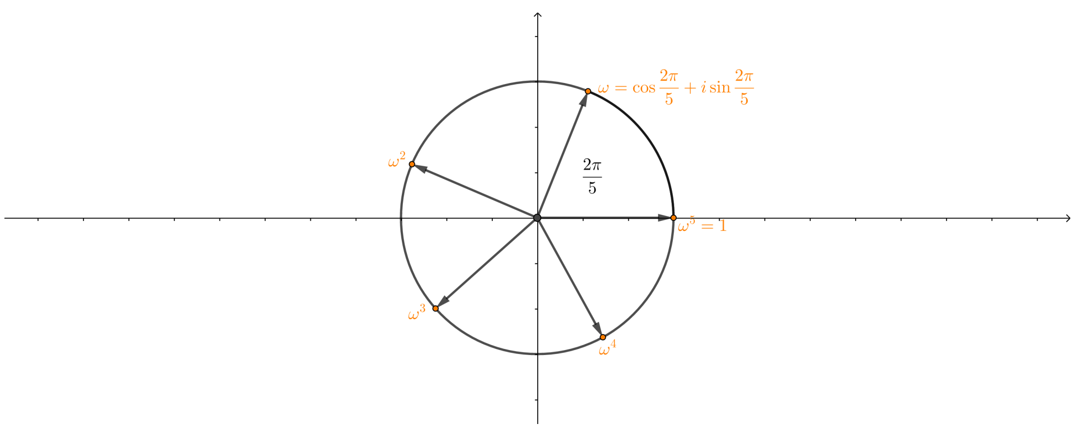
Če označimo

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

lahko po Moivrovi formuli vse n-te korene enote napišemo kot

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}.$$

Ker so vsi n-ti koreni enote potence števila ω, imenujemo ω *primitivni* n-ti koren enote.



Slika 4. Peti koreni enote

Naloga. Za katere k je ω^k tudi primitivni n-ti koren enote (se pravi, da se da vsak ω^m ($m \in \mathbb{N}$) izraziti kot $(\omega^k)^s$ za kak $s \in \mathbb{N}$)?

Zgled 2.3. Primitivni tretji koren enote je

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tretji koreni enote so torej 1, ω in $\omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Naloge. 1. Izračunajte četrte in pete korene enote.
2. Izračunajte $1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{n-1}$, kjer je $\omega \neq 1$ n-ti koren enote.

3. Ker je ena stranica trikotnika manjša ali enaka vsoti drugih dveh, za normo vektorjev velja *trikotniška neenakost*:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \tag{2.7}$$

Dokažite to neenakost računsko. Kdaj velja enakost?

4. Sklepajte iz neenakosti (2.7), da velja

$$||\beta| - |\alpha|| \leq |\beta - \alpha|.$$

(Namig: dokazati zadošča, da je $|\beta| - |\alpha| \leq |\beta - \alpha|$, saj lahko potem zamenjamo med seboj α in β. Označimo $\gamma = \beta - \alpha$. Potem je treba dokazati le še, da velja $|\gamma + \alpha| - |\alpha| \leq |\gamma|$.)

Koreni enote so rešitve enačbe oblike $z^n - 1 = 0$. Osnovni izrek algebre pove, da ima tudi splošnejša enačba

$$z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0,$$

kjer so α_j poljubna kompleksna števila, vsaj eno rešitev v $\mathbb{C}$. (Od tod potem hitro sledi, da ima n rešitev, če štejemo vsako ničlo polinoma v skladu z njeno mnogokratnostjo.) Tega izreka pa ne bomo dokazovali na tem mestu, saj je dokaz mnogo lažji, če uporabimo kompleksno analizo, ki jo bomo spoznali šele kasneje.

3. Zaporedja realnih števil

Ko govorimo o zaporedjih realnih števil, mislimo na neskočna *zaporedja*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{3.1}$$

kjer so vsi *členi* a_n realna števila. Pri tem je pomemben vrstni red členov, zato zaporedje (3.1) ni isto kot množica $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ Pač pa imamo zaporedje lahko za funkcijo $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, saj bi lahko člene označili kot $a(n)$ namesto a_n. Na kratko bomo zaporedje (3.1) zapisali kar kot (a_n).

Definicija 3.1. Zaporedje (a_n) je *naraščajoče*, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za vse $n = 1, 2, \ldots$. Če velja pri tem stroga neenakost (torej $a_n < a_{n+1}$ za vse n), pravimo, da je zaporedje *strogo naraščajoče.*

Zaporedje (a_n) je *padajoče*, če je $a_n \geq a_{n+1}$ za vse $n = 1, 2, \ldots$. Če pri tem velja stroga neenakost $>$, imenujemo zaporedje *strogo padajoče.* Zaporedje je *(strogo) monotono*, če je (strogo) naraščajoče ali pa (strogo) padajoče.

Zaporedje (a_n) je (navzgor, navzdol) omejeno, če je taka množica $\{a_1, a_2, \ldots\}$. Najmanjšo med zgornjimi mejami navzgor omejenega zaporedja (a_n) (imenovano *supremum*), bomo označili kot

$$\sup(a_n).$$

Največjo med spodnjimi mejami navzdol omejenega zaporedja (a_n) (*infimum*) pa kot

$$\inf(a_n).$$

Zgled 3.2. (i) Zaporedje $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ je omejeno navzdol, ne pa navzgor, njegova natančna spodnja meja je 1. To zaporedje je strogo naraščajoče.

(ii) Zaporedje $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ je padajoče in omejeno. Njegova natančna zgornja meja 1 je člen zaporedja, njegova natančna spodja meja je 0 in ni člen zaporedja.

(iii) Zaporedje $c, c, c \ldots, c, \ldots$, ki ima vse člene enake, imenujemo *konstantno zaporedje*. To zaporedje je hkrati padajoče in naraščajoče, a ni strogo monotono. Seveda je omejeno.

(iv) Primer omejenega zaporedja, ki ni niti naraščajoče niti padajoče je

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots.$$

Posebna vrsta zaporedij so konvergentna zaporedja, to je taka, ki se približujejo kakemu številu, imenovanemu limita.

Definicija 3.3. Zaporedje (a_n) *konvergira proti limiti* a, če je za vsak $\varepsilon > 0$ zunaj intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ le končno mnogo členov a_n. Dejstvo, da je a limita zaporedja (a_n) bomo napisali kot

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Zaporedje, ki konvergira proti limiti, imenujemo *konvergentno*. Zaporedje, ki ni konvergentno, imenujemo *divergentno*.

Zaporedje ima lahko največ eno limito. Če sta namreč a in b različni števili, recimo $a < b$, lahko najdemo tak $\varepsilon > 0$, da sta intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ in $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ disjunktna (to bo res, če izberemo ε manjši ali enak $\frac{1}{2}(b-a)$). Potem gotovo ne more biti zunaj obeh intervalov le končno mnogo členov neskončnega zaporedja, saj so vsi tisti členi, ki so zunaj prvega intervala, vsebovani v drugem intervalu in obratno.

Pogoj, da je zunaj intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ le končno mnogo členov, pomeni, da so od nekega člena dalje, vsi členi vsebovani v intervalu (namreč od tistega člena dalje, ki je naslednji za zadnjim členom zunaj intervala). To, da je kak člen a_n v intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ pa pomeni, da je $|a_n - a| < \varepsilon$. Zato lahko definicijo limite povemo tudi takole:

Zaporedje (a_n) konvergira proti a natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako naravno število $n(\varepsilon)$, da velja

$$n \geq n(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Pri tem smo z zapisom $n(\varepsilon)$ naznačili, da je naravno število, za katero je izpolnjen pogoj (3.2), odvisno od ε. Če namreč izberemo manjši ε, se bodo v splošnem le kasnejši členi zaporedja razlikovali od a po absolutni vrednosti za manj kot ε.

Zgled 3.4. Členi zaporedja

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

se približujejo k 1, zato je $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Poglejmo, kaj je v tem primeru $n(\varepsilon)$ za dani $\varepsilon > 0$. Pogoj $|a_n - a| < \varepsilon$ se tukaj glasi

$$|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon,$$

kar lahko poenostavimo v

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Ta neenakost je ekvivalentna z $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Torej lahko vzamemo za $n(\varepsilon)$ katerokoli naravno število, ki je večje od $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Trditev 3.5. *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

Dokaz. Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ker je zunaj intervala $(a-1, a+1)$ le končno mnogo členov a_n, obstaja med njimi največji. Če je ta člen večji ali enak $a+1$, je zgornja meja zaporedja, sicer pa je zgornja meja $a+1$. S tem smo pokazali, da je zaporedje navzgor omejeno. Na enak način pokažemo, da je omejeno tudi navzdol. □

Obrat prejšnje trditve ne velja, ni namreč vsako omejeno zaporedje konvergentno.

Zgled 3.6. Zaporedje $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ je očitno omejeno, a ni konvergentno.

Vsota, razlika, produkt in kvocient zaporedij so definirani kot

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n),\ (a_n) - (b_n) = (a_n - b_n),\ (a_n)(b_n) = (a_n b_n),\ \frac{(a_n)}{(b_n)} = (\frac{a_n}{b_n}),$$

kjer moramo pri definiciji kvocienta privzeti, da je $b_n \neq 0$ za vsak n. Če se členi zaporedij a_n in b_n približujejo številoma a in b, potem se seveda $a_n \pm b_n$ bližajo k $a \pm b$, $a_n b_n$ pa k ab. Kot vajo iz uporabe kriterija (3.2) za limito, bomo to sedaj dokazali naslednjo trditev.

Trditev 3.7. *Bodita (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama a in b. Potem konvergirajo tudi zaporedja $(a_n \pm b_n)$ in $(a_n b_n)$ in velja*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b \quad in \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Če je pri tem $b \neq 0$ (in seveda $b_n \neq 0$), konvergira tudi zaporedje $(\frac{a_n}{b_n})$ in velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Obravnavajmo najprej vsoto zaporedij. Po kriteriju (3.2) moramo dokazati, da za vse dovolj velike n velja $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$. V ta namen bomo zapisali

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|. \tag{3.3}$$

Ker zaporedje (a_n) konvergira proti a, zaporedje (b_n) pa proti b, za vse dovolj pozne člene velja

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ in } \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Recimo, da prva od teh neenakosti velja za vse $n \geq n_1$, druga pa za $n \geq n_2$. Potem obe veljata za $n \geq m := \max\{n_1, n_2\}$ in za $n \geq m$ sledi iz (3.3), da je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Po kriteriju (3.2) od tod sledi, da je $a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$. Dokaz, da zaporedje $(a_n - b_n)$ konvergira proti $a - b$, je tako podoben pravkar navedenemu dokazu za vsoto, da ga bomo pustili za vajo.

Lotimo se sedaj produkta. Pokazati moramo, da je za vse dovolj velike n razlika $|a_n b_n - ab|$ pod ε. V ta namen jo najprej ocenimo kot

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \le |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|. \tag{3.4}$$

Ker zaporedje (b_n) konvergira proti b, za dovolj velike n, recimo za $n \ge n_2$, velja

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}. \tag{3.5}$$

(V imenovalcu na desni smo dodali 1 le zaradi možnosti, da je $a = 0$.) Ker je zaporedje (b_n) omejeno (saj je konvergentno), obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je $|b_n| < M$ za vse n. Tedaj je $|a_n - a||b_n| \le |a_n - a|M$. Ker zaporedje (a_n) konvergira proti a, je za vse dovolj velike n, recimo za $n \ge n_1$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$, torej

$$|a_n - a||b_n| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

Iz (3.4), (3.5) in (3.6) sedaj sledi za vse $n \ge \max\{n_1, n_2\}$

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon|a|}{2|a| + 1} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Po kriteriju (3.2) to pomeni, da zaporedje $(a_n b_n)$ konvergira proti ab.

Končno obravnavajmo še kvocient:

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = |\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}| = \frac{|(a_n - a)b + a(b - b_n)|}{|b_n||b|} \le \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a|}{|b_n||b|}|b_n - b|. \tag{3.7}$$

Po predpostavki je $b \ne 0$. Ker zaporedje (b_n) konvergira k b, je za vse dovolj velike n, recimo za $n \ge n_2$,

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4|a| + 1}|b|^2 \tag{3.8}$$

in hkrati b_n tako blizu b, da je $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ (kar je res, če je $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$). Tedaj je $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ in iz (3.7) in (3.8) sledi

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| \le 2\frac{|a_n - a|}{|b|} + 2\frac{|a|}{|b|^2}|b_n - b| \le 2\frac{|a_n - a|}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Ker zaporedje (a_n) konvergira k a, je za vse dovolj velike n, recimo za $n \ge n_1$,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4}|b|. \tag{3.10}$$

Za $n \ge \max\{n_1, n_2\}$ sledi sedaj iz (3.9) in (3.10)

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Zgled 3.8. Če zaporedje (b_n) konvergira proti 0, potem zaporedje $(\frac{a_n}{b_n})$ ni nujno konvergentno niti v primeru, ko je (a_n) konstantno zaporedje $1, 1, 1, \ldots$. Za zgled lahko vzamemo npr. $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Zaporedje $\frac{1}{b_n}$ ima v tem primeru člene $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$, ki ni omejeno, in ne bi konvergiralo niti, če bi dopuščali tudi neskončne vrednosti limit.

Zgled 3.9. (i) Izračunajmo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(n+4)(n-2)}{n^3+1}.$$

Ko števec in imenovalec ulomka delimo z najvišjo potenco od n, ki nastopa v izrazu, tj. z n^3, dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2-\frac{1}{n})(1+\frac{4}{n})(1-\frac{2}{n})}{1+\frac{1}{n^3}} = 2.$$

(ii) Tudi v izrazu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n}$$

najprej delimo števec in imenovalec z največjim členom 5^{n+1}, nakar dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{3}{5})^{n+1}+1}{\frac{1}{5}(\frac{3}{5})^n-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{-1}{5}} = -5.$$

(iii) V izrazu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$$

je z večanjem n-ja v števcu čedalje več členov, zato tukaj ne moremo uporabiti pravila za limito vsote zaporedij. Pač pa se moramo spomniti na srednješolsko formulo $1+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Tako dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}.$$

(iv) V izrazu

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$$

gresta oba člena, $\sqrt{n^2+n}$ in n, proti ∞, ko gre n proti ∞. Za izračun te limite pomnožimo izraz z $\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}$, da dobimo

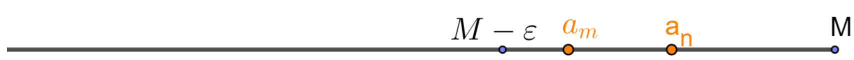
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Trditev 3.10. *Vsako monotono omejeno zaporedje je konvergentno. Njegova limita je enaka natančni zgornji meji, kadar je zaporedje naraščajoče, in natančni spodnji meji, kadar je padajoče.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali za naraščajoča, navzgor omejena zaporedja, saj je dokaz za padajoča zaporedja podoben. Naj bo torej (a_n) navzgor omejeno, naraščajoče zaporedje (seveda je omejeno tudi navzdol, s prvim členom, ker je naračajoče). Po aksiomu o kontinumu obstaja

$$M = \sup a_n.$$

Trdimo, da je M limita zaporedja (a_n). Ker je M najmanjša med zgornjimi mejami, za vsak $\varepsilon > 0$ število $M-\varepsilon$ ni zgornja meja zaporedja, zato obstaja kak člen a_m, ki



Slika 5. Limita narščajočega omejenega zaporedja

je večji od $M-\varepsilon$. Ker je zaporedje naraščajoče, so potem vsi nadaljnji členi tudi večji od $M-\varepsilon$, torej velja

$$n \geq m \Longrightarrow a_n > M-\varepsilon.$$

Ker je M zgornja meja zaporedja, so vsi ti členi v intervalu $(M-\varepsilon, M]$ in s tem tudi v intervalu $[M-\varepsilon, M+\varepsilon)$. Zunaj tega intervala je zato lahko le končno mnogo členov, namreč kvečjemu prvih $m-1$ členov. $\square$

Zgled 3.11. *Geometrijsko zaporedje* (q^n), kjer je q konstanta.

Če je $q>1$, lahko izrazimo $q=1+a$, kjer je $a>0$, in potem

$$q^n = (1+a)^n = 1 + na + \binom{n}{2} a^2 + \ldots > na.$$

Od tod sledi, da je tedaj zaporedje (q^n) navzgor neomejeno, ker to velja za zaporedje (na).

Če je $q=1$ ali pa $q=0$, je zaporedje (q^n) konstantno.

Če pa je $q \in (0,1)$, označimo $p=1/q$, tako da je $q^n = 1/p^n$. Ker je $p>1$, gre p^n proti ∞, ko gre n proti ∞, zato gre $1/p^n$ proti 0. Torej je tedaj zaporedje (q^n) konvergentno proti 0.

Če je $q \in (-1, 0)$, potem je $|q| \in (0, 1)$. Iz dejstva, da zaporedje $(|q|^n)$ konvergira proti 0 in ker je $q^n = \pm|q|^n$, sledi, da mora tudi zaporedje (q^n) konvergirati proti 0.

Če je $q = -1$, se zaporedje (q^n) glasi $-1, 1, -1, 1, \ldots$. Torej je tedaj omejeno, a ni konvergentno.

Če je $q < -1$, pa je $|q| > 1$, zato zaporedje $(|q|^n)$ neomejeno navzgor. Ker je $q^n = \pm|q|^n$, je tedaj tudi zaporedje (q^n) neomejeno (navzgor in navzdol).

Zaključek je torej naslednji:

Geometrijsko zaporedje (q^n) je konvergentno natanko tedaj, ko je $q \in (-1, 1]$. Tedaj je njegova limita enaka 0, kadar je $q \in (-1, 1)$; in enaka 1, kadar je $q = 1$.

Zgled 3.12. Oglejmo si zaporedje $(\sqrt[n]{a})$, kjer je a fiksno pozitivno realno število, različno od 1.

Če je $a > 1$ je to zaporedje strogo padajoče. Za dokaz, moramo pokazati, da je $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$ oziroma, ekvivalentno, $a^n < a^{n+1}$, kar takoj sledi iz $a > 1$. Ker je to zaporedje tudi navzdol omejeno (namreč z 1), mora biti konvergentno po prejšnji trditvi. Pokažimo, da je $\inf \sqrt[n]{a} = 1$ in zato tudi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Predpostavimo nasprotno, da bi obstajala kaka spodnja meja $m > 1$ tega zaporedja. Potem bi bilo $\sqrt[n]{a} \geq m$ za vse n, torej $a \geq m^n$ za vse n. Toda, ker je zaporedje (m^n) navzgor neomejeno po prejšnjem zgledu (saj je $m > 1$), bi bilo to protislovje.

Če je $a \in (0, 1)$, lahko izrazimo $a = 1/b$, kjer je $b > 1$. Ker je zaporedje $(\sqrt[n]{b})$ padajoče proti 1 (kot smo ugotovili v prejšnjem odstavku) in $\sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{b}$, je zaporedje $(\sqrt[n]{a})$ naraščajoče proti 1.

Tako smo ugotovili, da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ za vsak $a > 0$.

Zgled 3.13. Eulerjevo število e. Trdimo, da je zaporedje, s splošnim členom

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n,$$

strogo naraščajoče in navzgor omejeno. Za dokaz bomo najprej razvili splošni člen po binomski formuli:

$$a_n = 1 + n\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-n+1}{n}$$

(3.11)

$$= 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \ldots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) + \ldots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

Ko n povečamo na $n + 1$, se tudi število členov poveča za 1, tako da je

$$a_{n+1} =$$

$$2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \ldots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1}) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

Ko primerjajmo splošni člen

$$\frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\cdots(1 - \frac{k-1}{n})$$

v vsoti za a_n s tistim v vsoti za a_{n+1}, vidimo, da se poveča, saj je $1-\frac{j}{n+1} > 1-\frac{j}{n}$ za vse $j = 1, \ldots, k-1$. Poleg tega je v vsoti za a_{n+1} en pozitiven člen (namreč zadnji) več, zato je očitno res $a_{n+1} > a_n$. S tem smo dokazali, da je zaporedje (a_n) naraščajoče.

Ker so vsi faktorji $1-\frac{j}{n}$ v gornji formuli (3.11) za a_n pod 1, lahko ocenimo

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Ker je $k! = 2 \cdot 3 \cdots k \geq 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$, sledi od tod

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vsota na desni je pod 3 (ker je $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^{n-1}} = 1-\frac{1}{2^{n-1}} < 1$), torej smo dokazali, da je zaporedje (a_n) navzgor omejeno s 3. Po aksiomu o kontinuumu obstaja supremum tega zaporedja, ki je po trditvi 3.10 enaka limiti zaporedja. To limito imenujemo *Eulerjevo število* in označimo z e. Torej

$$e = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n. \tag{3.12}$$

Zgled 3.14. S številom e so povezane še mnoge druge popularne limite. Če npr. v izrazu $(1+\frac{1}{n})^n$ nadomestimo n z $-n$, dobimo

$$(1-\frac{1}{n})^{-n} = (\frac{n-1}{n})^{-n} = (\frac{n}{n-1})^n = (\frac{n-1+1}{n-1})^n = (1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1}).$$

Pri tem je zaporedje s členi $(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}$ v bistvu zaporedje iz prejšnjega zgleda (označite npr. $n-1$ z m), torej konvergira proti e. Ker $(1+\frac{1}{n-1})$ konvergira proti 1, ko gre n proti ∞, sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^{-n} = e.$$

Z upoštevanjem prejšnjega zgleda lahko torej napišemo, da je

$$\lim_{n\to\pm\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Naloge. 1. Izračunajte $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n+1}{n^2+1})^{3n+1}$. (Navodilo: Napišite splošni člen kot

$$[(1+\frac{n+1}{n^2+1})^{\frac{n^2+1}{n+1}}]^{\frac{n+1}{n^2+1}(3n+1)}.)$$

2. Če zaporedje a_n konvergira proti a, dokažite, da tudi zaporedje (b_n), kjer je $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, konvergira proti a.

3. Izračunajte $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

4. Stekališča in Cauchyev kriterij

Definicija 4.1. Točka $s \in \mathbb{R}$ je *stekališče zaporedja* (a_n), če je za vsak $\varepsilon > 0$ v intervalu $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ neskončno mnogočlenov a_n.

Ker je zahteva, da je zunaj intervala le končno mnogo členov ostrejša od zahteve, da jih je v intervalu neskončno mnogo, je limita zaporedja obenem stekališče. Obratno pa ni vedno res: zaporedje $1, -1, 1, -1, \ldots$ ima dve stekališči, namreč 1 in -1, nobeno od njiju ne more biti limita.

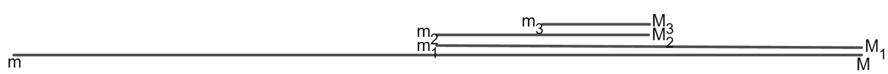
Naloge. 1. Napišite primere zaporedij, ki imajo natanko 3, 4, 5,... stekališč.

2. Napišite kak zgled zaporedja, ki ima neskončno mnogo stekališč. Kaj pa primer zaporedja, katerega stekališča so vsa realna števila?

3. Napišite kak zgled neomejenega zaporedja, ki ima eno stekališče.

Nima vsako zaporedje stekališča. Npr. zaporedje $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ nima stekališč.

Izrek 4.2. *(Bolzano-Weierstrass) Vsako omejeno zaporedje realnih števil ima vsaj eno stekališče.*



SLIKA 6. Zaporedje vloženih intervalov

Dokaz. Ker je zaporedje omejeno, so vsi njegovi členi vsebovani v intervalu $[m, M]$, kjer je m spodnja, M pa zgornja meja zaporedja (a_n). Razpolovimo interval $[m, M]$. Izberimo tisto polovico, na kateri je neskončno mnogo členov zaporedja (a_n). (Če je neskončno mnogo členov na obeh polovicah, lahko izberemo katerokoli od njiju.) Če smo izbrali levo polovico, označimo razpolovišče z M_1 in pišimo $m_1 = m$; če pa smo izbrali desno polovico, označimo razpolovišče z m_1 in pišimo $M_1 = M$. V vsakem primeru dobimo interval $[m_1, M_1]$, ki vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja, je vsebovan v intervalu $[m, M]$ in ima polovično dolžino začetnega intervala.

Sedaj postopek ponovimo na intervalu $[m_1, M_1]$. Razdelimo ga torej na dve polovici in izberemo eno, na kateri je neskončno mnogo členov zaporedja. Če smo izbrali levo polovico, označimo razpolovišče z M_2 in pišimo $m_2 = m_1$; če pa smo izbrali desno polovico, označimo razpolovišče z m_2 in pišimo $M_2 = M_1$. Tako spet dobimo interval $[m_2, M_2]$, ki vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja, je vsebovan v prejšnjem intervalu $[m_1, M_1]$ in imal le pol njegove dolžine.

Ko ta postopek nadaljujemo, dobimo zaporedje zaprtih intervalov

$$[m, M] \supset [m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset \ldots \supset [m_k, M_k] \supset \ldots,$$

ki vsi vsebujejo neskončno mnogo členov zaporedja (a_n), njihove dolžine pa so $M_k - m_k = \frac{M-m}{2^k}$ in gredo proti 0. Ker je

$$[m_k, M_k] \supset [m_{k+1}, M_{k+1}],$$

mora veljati $m_{k+1} \geq m_k$ in $M_{k+1} \leq M_k$. Torej je zaporedje levih krajišč (m_k) naraščajoše, in ker je omejeno (npr. z M), je konvergentno proti $s := \sup m_k$. Podobno je zaporedje desnih krajišč (M_k) padajoče in navzdol omejeno (npr.z m), zato konvergira proti $z := \inf M_k$. Opazimo, da za $l < k$ velja $m_l \leq m_k < M_k$ in $m_k < M_k \leq M_l$, kar pove, da so vsa leva krajišča manjša od vseh desnih. Od tod sledi, da je $s \leq z$, se pravi, da imamo

$$m_k \leq s \leq z \leq M_k$$

za vsak k. Od tod sledi $z - s \leq M_k - m_k$, in ker gre $M_k - m_k$ proti 0, mora biti $z - s = 0$, torej $z = s$.

Trdimo, da je s stekališče zaporedja (a_n). Za vsak $\varepsilon > 0$ so namreč v intervalu $(s - \varepsilon, s]$ vsi dovolj pozni členi zaporedja (m_k), saj je s njihov supremum. Prav tako so v intervalu $[z, z + \varepsilon)$ vsi dovolj pozni členi zaporedja (M_k), saj je z njihov infimum. Ker je $z = s$, sledi od tod, da so v intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ vsi dovolj pozni členi obeh zaporedij, (m_k) in (M_k), torej je $[m_k, M_k] \subseteq (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ za kak k. Ker je v intervalu $[m_k, M_k]$ neskončno mnogo členov a_n, jih je neskončno tudi v intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. S tem smo pokazali, da je s stekališče zaporedja (a_n). $\square$

Naloga. Dokažite, da je s stekališče zaporedja (a_n) natanko tedaj, ko kako podzaporedje konvergira proti s. (Rešitev. Če je s stekališče, je v vsakem intervalu $(s - \frac{1}{k}, s + \frac{1}{k})$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ neskončno mnogo členov a_n, torej lahko izberemo enega, $a_{n_k} \in (s - \frac{1}{k}, s + \frac{1}{k})$. Ker gredo tedaj razlike $|a_{n_k} - s|$ proti 0, zaporedje (a_{n_k}) (ki je podzaporedje od (a_n)), konvergira proti s.

Za dokaz v obratno smer, naj bo s limita kakega podzaporedja (a_{n_k}) zaporedja (a_n). Potem je v vsakem intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ (kjer je $\varepsilon > 0$) neskončno mnogo členov zaporedja (a_{n_k}) (saj jih je zunaj intervala le končno). Ker so vsi ti členi tudi členi celotnega zaporedja (a_n), je s tem dokazano, da je s stekališče zaporedja (a_n).

Pri konvergentnem zaporedju (a_n) z limito a gredo razlike $a_n - a_m$ proti $a - a = 0$, ko gresta m in n proti ∞. Taka zaporedja imenujemo Cauchyeva. Natančneje:

Definicija 4.3. Zaporedje (a_n) je Cauchyevo, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da za vsaka naravna m, n iz $m \geq n_\varepsilon$ in $n \geq n_\varepsilon$ sledi

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Kako v splošnem ugotoviti, ali je dano zaporedje konvergentno, kadar je njegova limita kako iracionalno število, ki ga še nismo srečali? Odgovor podaje naslednji izrek, ki pravi, da zadošča ugotoviti, ali je Cauchyevo.

Izrek 4.4. *Zaporedje realnih števil je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyevo.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če je zaporedje (a_n) konvergentno, z limito a, potem obstaja tak $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n(\varepsilon)$ velja

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Če je torej tudi $m \geq n(\varepsilon)$, velja tudi $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, in sledi

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

S tem smo pokazali, da je vsako konvergentno zaporedje (a_n) Cauchyevo.

Za dokaz v obratno smer, moramo najprej ugotoviti, da je vsako Cauchyevo zaporedje (a_n) omejeno. Ker je namreč zaporedje Cauchyevo, je $|a_n - a_m| < 1$ za vse dovolj velike m in n, recimo za vse $m, n \geq n_1$. Kot poseben primer je torej $|a_n - a_{n_1}| < 1$ za vse $n \geq n_1$, kar pomeni, da je $a_n \in (a_{n_1} - 1, a_{n_1} + 1)$, se pravi, da je izven tega intervala le končno mnogo členov. Zaporedje (a_n) je zato omejeno.

Naj bo sedaj (a_n) poljubno Cauchyevo zaporedje in $M \in \mathbb{R}$ tak, da je $|a_n| \leq M$. (Tukaj smo uporabili ugotovitev prejšnjega odstavka, da so Cauchyeva zaporedja omejena.) Naj bo s stekališče zaporedja (a_n). Pokazali bomo, da je s dejansko limita tega zaporedja. Ker je zaporedje Cauchyevo, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m, n \in \mathbb{N}$, ki sta večja ali enaka $n_{\varepsilon/2}$, velja

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Ker je s stekališče zaporedja (a_n), je v intervalu $(s - \frac{\varepsilon}{2}, s + \frac{\varepsilon}{2})$ neskončno mnogo členov a_n, torej tudi kak člen a_m z indeksom $m \geq n_{\varepsilon/2}$. Zanj velja $|a_m - s| < \frac{\varepsilon}{2}$, za vsak $n \geq n_{\varepsilon/2}$ pa velja tudi (4.1). Torej za vse $n \geq n_{\varepsilon/2}$ velja

$$|a_n - s| = |(a_n - a_m) + (a_m - s) \leq |a_n - a_m| + |a_m - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To dokazuje, da je $s = \lim_{n\to\infty} a_n$. □

Kot uporabo zadnjega izreka si oglejmo potence z realnim eksponentom. Naj bo $a > 0$. Kaj je a^r, kadar je r iracionalno število? Za racionalno število p/q (kjer je $p \in \mathbb{Z}$ in $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), vemo, da $a^{\frac{p}{q}}$ pomeni $\sqrt[q]{a^p}$. Za iracionalno število r pa lahko izberemo zaporedje racionalnih števil r_n, ki konvergirajo proti r (npr. zaporedje decimalnih približkov števila r). Potem lahko definiramo

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}, \tag{4.2}$$

če pokažemo, da ta limita obstaja. V ta namen zadošča po prejšnjem izreku dokazati naslednjo lemo:

Lema 4.5. *Zaporedje (a^{r_n}) je Cauchyevo.*

Dokaz. Pokazati moramo, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon \tag{4.3}$$

za vse dovolj velike $m, n \in \mathbb{N}$. Privzeli bomo, da je $a > 1$, saj je dokaz v primeru $a < 1$ podoben (ali pa si pomagamo z zvezo $a^r = (\frac{1}{a})^{-r}$). Ker zaporedje (r_n)

konvergira proti r, je omejeno, torej obstaja tak $M \in \mathbb{Q}$, da je $a^{r_n} \leq M$ za vse n. Zato velja

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| \leq a^M(a^{|r_n - r_m|} - 1). \tag{4.4}$$

Ker je $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = 1$, lahko izberimo $k \in \mathbb{N}$ tako, da je

$$|a^{\frac{1}{k}} - 1| < \varepsilon a^{-M}. \tag{4.5}$$

Ker je zaporedje (r_n) konvergentno (proti r), je Cauchyevo, torej je $|r_n - r_m| < \frac{1}{k}$ za vse dovolj velike m, n in zato po (4.5)

$$0 < a^{|r_n - r_m|} - 1 < a^{1/k} - 1 < \varepsilon a^{-M}.$$

Od tod in iz (4.4) sedaj sledi

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| < a^M \varepsilon a^{-M} = \varepsilon.$$

Torej je zaporedje (a^{r_n}) res Cauchyevo. □

Ali je tako definirana potenca a^r odvisna od izbire zaporedja (r_n), konvergirajočega proti r?

Če je (s_n) kako drugo, proti r konvergirajoče, zaporedje racionalnih števil, potem tudi zaporedje

$$r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots, r_n, s_n, \ldots$$

konvergira proti r. Po že dokazanem je zaporedje

$$a^{r_1}, a^{s_1}, a^{r_2}, a^{s_2}, \ldots, a^{r_n}, a^{s_n}, \ldots$$

konvergentno. Zaporedji (a^{r_n}) in (a^{s_n}) sta njegovi podzaporedji, zato imata isto limito. S tem smo pokazali, da je definicija potence a^r neodvisna od izbire zaporedja racionalnih števil r_n, konvergirajočih proti r.

5. Zgornja in spodnja limita

Malo verjetno je, da bi bilo naključno izbrano zaporedje konvergentno, zato bomo posplošili pojem limite.

Definicija 5.1. *Zgornja limita* (ali *limes superior*) zaporedja (a_n) je definirana kot

$$\limsup a_n = \begin{cases} \infty, & \text{če je zaporedje navzgor neomejeno;} \\ \text{največje stekališče,} & \text{če je zaporedje navzgor omejeno in ima kako stekališče;} \\ -\infty, & \text{če je zaporedje navzgor omejeno in nima stekališč.} \end{cases}$$

Opomba 5.2. Ta definicija zahteva pojasnili. (i) Če je zaporedje (a_n) navzgor omejeno in ima kako stekališče, potem je tudi množica S vseh njegovih stekališč navzgor omejena in neprazna, torej obstaja $M := \sup S$. Trdimo, da je M stekališče zaporedja (a_n); očitno je potem M največje stekališče zaporedja (a_n). Ker je M najmanjša med zgornjimi mejami množice S, za vsak $\varepsilon > 0$ število $M - \frac{\varepsilon}{2}$ ni zornja meja za S, zato obstaja $s \in S \cap (M - \frac{\varepsilon}{2}, M]$. Ker je s stekališče zaporedja (a_n) (saj je $s \in S$), je v intervalu $(s - \frac{\varepsilon}{2}, s + \frac{\varepsilon}{2})$ neskončno mnogo členov a_n.

SLIKA 7. Supremum stekališč

Ker je $(s-\frac{\varepsilon}{2}, s+\frac{\varepsilon}{2}) \subseteq (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$, jih je neskončno mnogo tudi v intervalu $(M-\varepsilon, M+\varepsilon)$. Torej je M res stekališče zaporedja (a_n).

(ii) Kadar je zaporedje (a_n) navzgor omejeno, a nima stekališč, potem ne more biti navzdol omejeno (saj že vemo, da ima vsako omejeno zaporedje vsaj eno stekališče). Prav tako, sme biti na vsakem končnem intervalu $[c, d]$ le končno mnogo členov, sicer bi zaporedje imelo vsaj eno stekališče. Od tod sledi, da je za vsak $c \in \mathbb{R}$ lahko večjih od c le končno mnogo členov a_n. V tem smislu tedaj zaporedje (a_n) konvergira proti $-\infty$.

Trditev 5.3. *Naj bo zaporedje (a_n) navzgor omejeno in naj ima kako stekališče ter označimo $M = \limsup a_n$. Potem je M najmanjše tako število $c \in \mathbb{R}$, da je za vsak $\varepsilon > 0$ le končno mnogo členov a_n večjih od $c + \varepsilon$.*

Dokaz. Naj bo Z zgornja meja zaporedja (a_n). Ker je M največje stekališče zaporedja (a_n), je na intervalu $(M+\varepsilon, Z]$ lahko le končno mnogo členov a_n, sicer bi imelo zaporedje kako stekališče v intervalu $[M+\varepsilon, Z]$, kar bi nasprotovalo dejstvu, da je M največje stekališče. Torej je večjih od $M+\varepsilon$ le končno mnogo členov a_n (Z je namreč njihova zgornja meja).

Naj bo sedaj $c \in \mathbb{R}$ tak, da je za vsak $\varepsilon > 0$ večjih od $c+\varepsilon$ le končno mnogo členov a_n. Potem so vsa stekališča zaporedja (a_n) manjša ali enaka c. Če bi bilo namreč kako stekališče s večje od c, bi izbrali pozitiven $\varepsilon < \frac{s-c}{2}$, kar bi zagotovilo, da je $c+\varepsilon < s-\varepsilon$. Toda v intervalu $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ je neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) (saj je s njegovo stekališče) in vsi ti členi so večji od $c+\varepsilon$. $\square$

Trditev 5.4. *Za dano zaporedje (a_n) in vsak $n = 1, 2, 3, \ldots$ označimo*

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}.$$

Potem je (b_n) padajoče zaporedje in

$$\inf b_n = \limsup a_n.$$

Pri tem definiramo, da je supremum navzgor neomejenega zaporedja enak ∞*, infimum navzdol neomejenega zaporedja pa* $-\infty$*.*

Dokaz. Če je zaporedje (a_n) navzgor neomejeno, potem je $b_n = \infty$ za vsak n, zato tudi $\inf b_n = \infty$. Po definiciji je tedaj tudi $\limsup a_n = \infty$, tako da je v tem primeru trditev dokazana.

Naj bo sedaj zaporedje (a_n) navzgor omejeno in naj nima nobenega stekališča. Tedaj je po drugi zgornji opombi za vsak $c \in \mathbb{R}$ večjih od c le končno mnogo členov a_n, torej so od nekje naprej vsi členi manjši ali enaki c, recimo

$$a_n \leq c \quad \text{za } n \geq m.$$

Toda potem je tudi

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \leq c \quad \text{za vsak } n \geq m,$$

se pravi, da je le končno mnogo členov b_n večjih od c. Ko uporabimo to ugotovitev na številih $c = -1, -2, -3, \ldots$, opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja kak člen b_{k_n}, ki je manjši od $-n$, zato je $\inf b_k = -\infty$. Ker je tukaj po definiciji tudi $\limsup a_n = -\infty$, spet velja enakost $\inf b_n = \limsup a_n$.

Preostane še možnost, ko je zaporedje (a_n) navzgor omejeno in ima kako stekališče, tako da je po definiciji $\limsup a_n$ največje stekališče; imenujmo ga M. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je v intervalu $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ neskončno mnogo členov a_n, je $\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots,\} > M - \varepsilon$. Torej je $b_n > M - \varepsilon$ za vsak n in zato $\inf b_n \geq M - \varepsilon$. Ker velja to za vsak $\varepsilon > 0$, sledi

$$\inf b_n \geq M.$$

Privzemimo, da bi bilo $c := \inf b_n > M$. (Videli bomo, da to vodi do protislovja.) Potem je $b_n \geq c$ za vsak n, se pravi

$$\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\} \geq c > d,$$

kjer je d neko fiksno (poljubno izbrano)število med M in c. Od tod sledi, da je $a_{k_n} > d$ za kak $k_n \in \{n, n+1, n+2, n+3, \ldots\}$. Torej je na intervalu $[d, Z]$, kjer je Z zgornja meja zaporedja (a_n), neskončno mnogo členov tega zaporedja. Toda potem je na tem intervalu vsaj eno stekališče tega zaporedja. To stekališče je večje od M (ker je $d > M$), kar nasprotuje dejstvu, da je M največje stekališče. $\square$

Spodnja limita ali *limes inferior* zaporedja (a_n) je definirana podobno kot zgornja in jo označimo kot $\liminf a_n$. Ker je tukaj ne bomo pogosto uporabljali, se bomo zadovoljili s pripombo, da je

$$\liminf a_n = -\limsup(-a_n).$$

Dokaz naslednje trditve bomo pustili za nalogo.

Trditev 5.5. *Če je zaporedje* (a_n) *konvergentno, je* $\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n$. *Natančneje: zaporedje* (a_n) *je konvergentno natanko tedaj, ko je* $\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}$.

Naloge. 1. Določite zgornjo in spodnjo limito zaporedij: (i) $(n[1 - (-1)^n])$; (ii) $(-n^2)$;

(iii) $\sin n\pi + \cos n\pi$.

2. Za zaporedji (a_n) in (b_n) pokažǐte, da iz $a_n \leq b_n$ $(\forall n)$ sledi $\limsup a_n \leq \limsup b_n$ in $\liminf a_n \leq \liminf b_n$.

3. Dokažite, da velja

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

za vsaki omejeni zaporedji (a_n) in (b_n).

6. Številske vrste

Zapis *vrste*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{6.1}$$

kjer so njeni *členi* a_n (realna) števila, namiguje na namero, da bi sešteli vse člene. Toda, kaj naj pomeni taka vsota neskončno mnogo členov?

Definicija 6.1. *Delne vsote* vrste (6.1) so

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots.$$

Vrsta (6.1) je *konvergentna*, če je konvergentno zaporedje (s_n) njenih delnih vsot. Vsota konvergentne vrste je tedaj

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Vrsto, ki ni konvergentna, imenujemo *divergentna*.

Zgled 6.2. Najpopularnejša je *geometrijska vrsta*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots. \tag{6.2}$$

Če je $q = 1$, je n-ta delna vsota te vrste $s_n = n$, zaporedje delnih vsot je tedaj divergentno. Če je $q \neq 1$, lahko

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \tag{6.3}$$

izračunamo tako, da enakost (6.3) pomnožimo s q, s čimer dobimo

$$qs_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n,$$

in nato to enakost odštejemo od (6.3), da dobimo

$$(1-q)s_n = 1 - q^n.$$

Torej je

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q},$$

kadar je $q \neq 1$. To zaporedje konvergira natanko tedaj, ko konvergira zaporedje (q^n), kar je natanko tedaj, ko je $|q| < 1$ (ker je tukaj $q \neq 1$). S tem smo dokazali:

Geometrijska vrsta (6.2) konvergira natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. Tedaj je njena vsota

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Iz dejstva, da so konvergentna zaporedja ista kot Cauchyeva, sledi naslednji Cauchyev kriterij za konvergenco vrst:

Izrek 6.3. *Vrsta (6.1) je konvergentna natanko tedaj, ko za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tak* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$*, da za vsaka* $n > m \geq n_\varepsilon$ *velja*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon. \tag{6.4}$$

Dokaz. Zaporedje delnih vsot s_n je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyevo, se pravi, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da za vsaka naravna $m, n \geq n_\varepsilon$ velja $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Pri tem smemo vzeti, da je $n > m$. Delni vsoti s_m in s_n sta tedaj

$$s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Absolutna vrednost njune razlike pa je

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n|.$$

Pogoj za konvergenco zaporedja delnih vsot (s_n) se torej glasi, kot je zapisano v izreku. □

Ko uporabimo izrek 6.3 v primeru $n = m + 1$, spoznamo, da velja:

Posledica 6.4. *Členi konvergentne vrste konvergirajo proti* 0*. Drugače rečeno, če je vrsta (6.1) konvergentna, je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Vrsta

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

ne more biti konvergentna, saj njeni členi ne konvergirajo proti 0. Pogoj, da konvergirajo njeni členi proti 0, je potreben za konvergentnost vrste, kot pove naslednji zgled, pa ni zadosten.

Zgled 6.5. Vrsto

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

imenujemo *harmonična vrsta*. Njeni členi $\frac{1}{n}$ konvergirajo proti 0, kljub temu pa je, kot bomo pokazali, ta vrsta divergentna. V ta namen združimo člene vrste na naslednji način:

$$1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots.$$

V n-tem oklepaju je 2^{n-1} členov, najmanjši med njimi je zadnji, ki je $\frac{1}{2^n}$. Zato je vsota vseh členov v n-tem oklepaju večja ali enaka $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$. Ko seštejemo m izrazov v oklepajih, vidimo, da je ustrezna delna vsota harmonične vrste večja od $1 + m \cdot \frac{1}{2}$, kar gre proti ∞, ko gre m proti ∞. Delne vsote harmonične vrste torej niso omejene navzgor, zato ne morejo konvergirati.

Definicija 6.6. Vrsta (6.1) *absolutno konvergira*, če konvergira vrsta

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots. \tag{6.5}$$

Trditev 6.7. *Absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. Uporabili bomo Cauchyev kriterij. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če je vrsta (6.1) absolutno konvergentna, to pomeni, da je vrsta (6.5) konvergentna, torej obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da za vsaka naravna $n > m \geq n_\varepsilon$ velja

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Po trikotniški neenakosti je potem

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon,$$

od koder po Cauchyevem kriteriju sledi, da je vrsta (6.1) konvergentna. □

Konvergentno vrsto, ki ne konvergira absolutno, imenujemo *pogojno konvergentna.* Zglede takih vrst bomo spoznali nekoliko kasneje.

Trditev 6.8. *(Primerjalni kriterij) Predpostavimo, da je*

$$|a_n| \leq b_n \tag{6.6}$$

za vsak n. Če konvergira vrsta $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$, potem vrsta $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ absolutno konvergira.

Dokaz. Ker za poljubna naravna $m < n$ velja

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| \leq b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n,$$

zato trditev sledi takoj iz Cauchyevega kriterija. □

Če za člene a_n in b_n dveh vrst velja neenakost (6.6), pravimo, da je vrsta $b_1 + b_2 + \ldots$ *majoranta* za vrsto $a_1 + a_2 + \ldots$; pravimo tudi, da je druga vrsta *minoranta* prve. Če konvergira njena majoranta, potem vrsta absolutno konvergira.

Zgled 6.9. Vrsta

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{6.7}$$

ima majoranto

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots. \tag{6.8}$$

Pokazali bomo, da vrsta (6.7) konvergira, zato konvergira tudi vrsta (6.7). Vrsto (6.8) lahko napišemo kot

$$1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + \ldots.$$

Njena n-ta delna vsota je

$$s_n = 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Limita zaporedja delnih vsot pa je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{n}) = 2.$$

Za vsak $r > 2$ je vrsta (6.7) majoranta za vrsto

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots + \frac{1}{n^r} + \ldots. \tag{6.9}$$

Ker vrsta (6.7) konvergira, konvergira tudi njena minoranta (6.9). S pomočjo integralskega kriterija (ki ga bomo spoznali kasneje) se da dokazati, da vrsta (6.9) konvergira za vsak $r > 1$. Drugo vprašanje pa je, kaj je njena vsota. Da se pokazati, da je npr. vsota vrste (6.7) enaka $\frac{\pi^2}{6}$, vendar je za to potrebno novo orodje, ki ga boste spoznali kasneje.

Izrek 6.10. *(Korenski kriterij za konvergenco vrst) Naj bo*

$$R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Če je $R < 1$, vrsta (6.1) absolutno konvergira. Če pa je $R > 1$, vrsta (6.1) divergira.

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je $R > 1$ in izberimo poljuben $c \in (1, R)$. Ker je $R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, je neskonňo mnogo členov $\sqrt[n]{|a_n|}$ večjih od c, torej $|a_n| > c^n$ za neskončno mnogo n-jev. Ker je $c > 1$, gre c^n proti ∞, ko gre n proti ∞. Sledi, da zaporedje (a_n) ni niti omejeno, torej ne konvergira proti 0, zato vrsta (6.1) tedaj ne more konvergirati.

Predpostavimo sedaj še, da je $R < 1$ in izberimo $c \in (R, 1)$. Ker je $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = R < c$, je večjih od c le končno mnogo členov zaporedja $(\sqrt[n]{|a_n|})$, torej velja

$$|a_n| \leq c^n \tag{6.10}$$

za vse, razen morda za končno mnogo indeksov n. Tedaj (6.10) velja za vse n od nekega n_0 naprej, kar pomeni, da je geometrijska vrsta

$$c^{n_0} + c^{n_0+1} + c^{n_0+2} + \ldots \tag{6.11}$$

majoranta za vrsto

$$|a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \ldots . \tag{6.12}$$

Ker je $c \in (0, 1)$, geometrijska vrsta (6.11) konvergira, zato konvergira tudi njena minoranta (6.12). Vrsta (6.5) se razlikuje od vrste (6.12) le v končno mnogo členih (namreč vrsti (6.12) je prištetih prvih $n_0 - 1$ členov), zato je konvergentna tudi vrsta (6.5), kar pomeni, da je vrsta (6.1) absolutno konvergentna. □

Opomba 6.11. Kadar je $R = 1$, korenski kriterij molči.

Zgled 6.12. Za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots ?$$

Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = |x|,$$

po korenskem kriteriju vrsta absolutno konvergira, če je $|x| < 1$, in divergira, če je $|x| > 1$. Če pa je $|x| = 1$, sta dve možnosti: $x = 1$ in $x = -1$. V obeh primerih členi vrste $n(\pm 1)^n$ ne konvergirajo proti 0, zato je tedaj vrsta divergentna.

Trditev 6.13. *(Kvocientni kriterij) Predpostavimo, da je $a_n \neq 0$ za vse n. Če je*

$$R := \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1,$$

vrsta (6.1) absolutno konvergira. Če pa je

$$r := \liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1,$$

vrsta (6.1) divergira.

Dokaz. Privzemimo, da je $R < 1$ in izberimo $c \in (R, 1)$. Ker je $R = \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < c$, je večjih od c le končno mnogo členov $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, torej obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da velja

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c \quad \forall n \geq m.$$

Od tod sledi $|a_{m+1}| \leq c|a_m|$, $|a_{m+2}| \leq c|a_{m+1}| \leq c^2|a_m|$, itd. z indukcijo

$$|a_{m+k}| \leq c^k |a_m| \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6.13}$$

To pomeni, da je geometrijska vrsta

$$|a_m|(1 + c + c^2 + \ldots + c^k + \ldots) \tag{6.14}$$

majoranta za vrsto

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots. \tag{6.15}$$

Ker je $c \in (0, 1)$, vrsta (6.14) konvergira, zato absolutno konvergira tudi vrsta (6.15). Ker se vrsta (6.1) razlikuje od vrste (6.15) le v dodatnih prvih $m-1$ členih, mora konvergirati absolutno.

Predpostavimo sedaj, da je $r > 1$ in izberimo $c \in (1, r)$. Potem je manjših od c le končno mnogo členov $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, torej obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da velja

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq c \quad \forall n \geq m. \tag{6.16}$$

Od tod sledi $|a_{n+k}| \geq c^k|a_m|$, kar pove, da zaporedje (a_n) sploh ni omejeno (saj gre c^k proti ∞, ko gre k proti ∞), torej ne konvergira proti 0, zato vrsta (6.1) ne more konvergirati. □

Zgled 6.14. Za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots?$$

Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0,$$

po kvocientnem kriteriju vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Definicija 6.15. Vrsto

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \tag{6.17}$$

v kateri so bodisi vsi a_n pozitivni bodisi vsi negativni, imenujemo *alternirajoča vrsta.*

Trditev 6.16. *Če v alternirajoči vrsti členi padajo po absolutni vrednosti proti* 0 *(torej* $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ *in* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*), potem vrsta konvergira.*

Dokaz. Predpostaviti smemo, da so v vrsti (6.17) vsi a_n pozitivni (sicer bi jo pomnožili z -1). Uporabili bomo Cauchyev kriterij za konvergenco vrst. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokazati moramo, da je

$$|a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - \ldots \pm a_n| < \varepsilon, \tag{6.18}$$

če je m dovolj velik. V vsoti (6.18) je $n - m + 1$ členov. Če je to število sodo, jo lahko zapišemo kot $(a_m - a_{m+1}) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)$; ker je po predpostavki $a_k \geq a_{k+1}$ za vse k, je ta vsota nenegativna. Če pa je število $n - m + 1$ liho, lahko vsoto v (6.18) napišemo kot $(a_m - a_{m+1}) + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n$, od koder vidimo, da je tudi v tem primeru vsota nenegativna. Absolutna vrednost v izrazu (6.18) je torej odveč. Kadar je število $n - m + 1$ liho, napišimo sedaj izraz v (6.18) kot $a_m - [(a_{m+1} - a_{m+2}) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)]$, od koder vidimo, da je manjši ali enak a_m. Ker zaporedje (a_m) konvergira proti 0, je torej ta vsota pod ε, če je m dovolj velik. Kadar pa je število $n - m + 1$ sodo, napišemo vsoto (6.18) kot $a_m - [(a_{m+1} - a_{m+2}) + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n]$, kar je spet manjše ali enako a_m. □

Zgled 6.17. V alternirajoči vrsti

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

členi po absolutni vrednosti padajo proti 0, zato je ta vrsta konvergentna.

Naloge. 1. Pokažite, da vrsta

$$1 + \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \ldots + \frac{1}{n\log n} + \ldots$$

konvergira absolutno.

2. Naj bo $a > 1$. Pokažite, da vrsta $(a-1) - (\sqrt{a}-1) + (\sqrt[3]{a}-1) - (\sqrt[4]{a}-1) + \ldots$ konvergira. *Ali konvergira absolutno?

3. Za katere x konvergira vrsta $x + \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(nx)^n}{n!} + \ldots$?

4.** Pokažite, da je vrsta s členi $\frac{(-1)^n}{n}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n})$ pogojno konvergentna.

7. Še o vrstah

Oglejmo si najprej posplošitev kriterija o konvergenci, ki smo ga v prejšnjem razdelku spoznali za alternirajoče vrste.

Izrek 7.1. *(Dirichletov kriterij) bo (a_n) monotono zaporedje z limito 0, (b_n) pa tako zaporedje, da je zaporedje delnih vsot $s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ omejeno, se pravi $|s_n| \leq M$ za kak $M \in \mathbb{R}$ in vse n. Potem je vrsta*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n + \ldots \tag{7.1}$$

konvergentna.

Dokaz. Predpostaviti smemo, da je zaporedje (a_n) padajoče (in ima zato pozitivne člene, ker konvergira proti 0), sicer bi obravnavali zaporedje $(-a_n)$. Po Cauchyevem kriteriju za konvergenco vrst zadošča pokazati, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja $|\sum_{j=m}^{n} a_j b_j| < \varepsilon$ za vsaka dovolj velika $m < n$. Opazimo, da je

$$|\sum_{j=m}^{n} a_j b_j| = |\sum_{j=m}^{n} a_j(s_j - s_{j-1})| = |-a_m s_{m-1} + \sum_{j=m}^{n-1}(a_j - a_{j+1})s_j + a_n s_n|$$

$$\leq a_m|s_{m-1}| + \sum_{j=m}^{n-1}(a_j - a_{j+1})|s_j| + a_n|s_n| \leq M(a_m + \sum_{j=m}^{n-1}(a_j - a_{j+1}) + a_n) = 2Ma_m.$$

Ker zaporedje (a_n) konvergira k 0, je $2Ma_m < \varepsilon$ za vse dovolj velike m. □

Zgled 7.2. Pokažimo, da za vsak $x \neq 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ konvergira vrsta

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n} + \ldots.$$

Po Dirichletovem kriteriju zadošča dokazati, da so vsote

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \tag{7.2}$$

omejene z isto konstanto, saj zaporedje $(\frac{1}{n})$ pada proti 0. Vsoto (7.2) lahko izračunamo, tako da jo najprej pomnožimo s $\sin\frac{x}{2}$ in nato vsak člen $\cos kx \sin\frac{x}{2}$ zapišemo z uporabo formule $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$. Po krajšem računu dobimo, da je vsota (7.2) enaka

$$\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})x} - \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

torej omejena z $\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$.

Če v vrsti zamenjamo vrstni red le končno mnogo členov, to ne more vplivati na konvergenco niti na vsoto vrste. Drugače pa je lahko, če zamenjamo vrstni red neskončno mnogo členov.

Imejmo vrsto

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{7.3}$$

in zamenjajmo v njej vrstni red členov, tako da dobimo novo vrsto

$$a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)} + \ldots. \tag{7.4}$$

Tukaj smo s σ označili zamenjavo (ali permutacijo; tj. bijektivno preslikavo množice $\mathbb{N}_0 := \{1, 2, 3, \ldots\}$ nase). S tem hočemo povedati le, da je množica novih indeksov $\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots\}$ enaka množici $\mathbb{N}_0$ in da je $\sigma(k) \neq \sigma(l)$, če je $k \neq l$ (tj. vsak indeks nastopa natanko enkrat).

Izrek 7.3. *Če je vrsta (7.3) absolutno konvergentna, je taka tudi vrsta (7.4) in obe imata isto vsoto.*

Dokaz. Po Cauchyevem kriteriju za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da je

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon,$$

če je $n > m \geq n_\varepsilon$. Ko pošljemo n proti ∞, sledi od tod

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_\varepsilon. \tag{7.5}$$

Izberimo $k \in \mathbb{N}$ tako velik, da so med členi $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(k-1)}$ tudi vsi členi $a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon - 1}$. Potem v vsoti

$$|a_{\sigma(k)}| + |a_{\sigma(k+1)}| + |a_{\sigma(k+2)}| + \ldots \tag{7.6}$$

nastopajo le členi z indeksi, večjimi od $n_\varepsilon - 1$, zato iz (7.5) sledi, da je vsota (7.6) manjša ali enaka ε. Od tod sedaj iz Cauchyevega kriterija sledi, da je vrsta (7.4) absolutno konvergentna.

Iz (7.5) sledi tudi, da je razlika med vsoto s vrste (7.3) in njeno n-to delno vsoto s_n pod ε, če je $n \geq n_\varepsilon$, torej

$$|s - s_{n_\varepsilon}| \leq \varepsilon. \tag{7.7}$$

Po drugi strani, če označimo z z vsoto vrste (7.4), v razliki $z - s_{n_\varepsilon}$ nastopajo le členi a_l z indeksi $l \geq n_\varepsilon$, zato iz (7.5) sledi tudi, da je

$$|z - s_{n_\varepsilon}| \leq \varepsilon. \tag{7.8}$$

Iz (7.7) in (7.8) sklepamo, da velja

$$|z - s| \leq 2\varepsilon.$$

Ker velja to za vsak $\varepsilon > 0$, mora biti $|z - s| = 0$, se pravi $z = s$. □

Izrek 7.4. *Če je vrsta*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{7.9}$$

pogojno konvergentna, potem za vsak $s \in \mathbb{R}$ obstaja taka permutacija σ množice $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, da je

$$s = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)} + \ldots.$$

Dokaz. Naj bodo $b_1, b_2, \ldots$ vsi pozitivni, $-c_1, -c_2, \ldots$ pa vsi negativni členi vrste (7.9). Trdimo, da nobena od vrst

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{7.10}$$

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{7.11}$$

ni konvergentna. Če bi bili obe vrsti (7.10) in (7.11) konvergentni, bi namreč iz Cauchyevega kriterija (z uporabo trikotniške neenakosti) hitro sledilo, da je vrsta (7.9) absolutno konvergentna, čeprav je po predpostavki le pogojno konvergentna. Torej je vsaj ena od vrst (7.10), (7.11) divergentna. Predpostavimo, da je npr. prva divergentna, druga pa konvergentna. Potem, ker je vrsta (7.10) divergentna, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\ell \in \mathbb{N}$ obstajata taka $n_\ell, m_\ell \in \mathbb{N}$, da je $n_\ell > m_\ell \geq \ell$ in

$$b_{m_\ell + 1} + \ldots + b_{n_\ell} \geq 2\varepsilon. \tag{7.12}$$

Ker pa vrsta (7.11) konvergira, obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da je

$$c_{m+1} + \ldots + c_n < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_\varepsilon. \tag{7.13}$$

Izberimo sedaj $\ell \in \mathbb{N}$ tako velik, da so vsi členi $-c_1, \ldots, -c_{n_\varepsilon}$ našteti med prvimi ℓ členi vrste (7.9). Ker je $n_\ell > m_\ell \geq \ell$, nobeden od členov $b_{m_\ell+1}, \ldots, b_{n_\ell}$ ni med prvimi ℓ členi vrste (7.9). Za vsaka $n > m \geq \ell$ potem velja

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| = |(b_{m_\ell+1} + \ldots + b_{n_\ell} + \text{vsota še nekaterih } b_i)$$

$$-(c_{m+1} + \ldots c_n + \text{vsota še nekaterih } c_j \text{ z indeksi } j > n_\varepsilon)|$$

$$\geq (b_{m_\ell+1} + \ldots + b_{n_\ell} + \text{vsota še nekaterih } b_i)$$

$$-(c_{m+1} + \ldots c_n + \text{vsota še nekaterih } c_j \text{ z indeksi } j > n_\varepsilon)$$

$$\geq (b_{m_\ell+1} + \ldots + b_{n_\ell}) - (c_{m+1} + \ldots + c_n + \ldots) \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

kjer smo uporabili, da velja (7.13) za vse p (namesto n), večje od m. Po Cauchyevem kriteriju ta ocena pove, da vrsta (7.9) ni konvergentna, kar je protislovje. Tako smo dokazali, da morata biti obe vrsti (7.10) in (7.11) divergentni, kadar je (7.9) pogojno konvergentna.

Spremenimo sedaj vrstni red členov vrste (7.9) tako, da na začetek napišemo ravno toliko členov vrste (7.10), da je njihova vsota večja ali enaka s. To je mogoče, ker je vrsta (7.10) divergentna, njena vsota torej ∞. Recimo torej, da smo za to potrebovali prvih n_1 členov vrste (7.10), tako da je

$$b_1 + \ldots + b_{n_1} \leq s < b_1 + \ldots + b_{n_1} + b_{n_1+1}.$$

Opazimo, da je $s - (b_1 + \ldots + b_{n_1}) < b_{n_1+1}$. Sedaj odštejmo od vsote $b_1 + \ldots + b_{n_1}$ ravno toliko členov vrste (7.11) da je rezultat manjši od s, torej

$$b_1 + \ldots + b_{n_1} - c_1 - \ldots c_{n_2} < s, \quad b_1 + \ldots + b_{n_1} - c_1 - \ldots - c_{n_2-1} \geq s.$$

Opazimo, da se ta delna vsota razlikuje od s za manj kot c_{n_2}; če bi pa odšteli manj c-jev, bi se delna vsota razlikovala od s še vedno za manj kot b_{n_1+1}. V naslednjem koraku dodamo vsoti $b_1 + \ldots + b_{n_1} - c_1 - \ldots c_{n_2}$ ravno toliko členov $b_{n_1+1}, b_{n_1+2}, \ldots$, da je vsota večja ali enaka s. Potem spet odštejemo ravno dovolj členov $c_{n_2+1}, c_{n_2+2}, \ldots$, da pade rezultat pod s. (Vse to je mogoče, ker sta obe vrsti (7.10) in (7.11) divergentni, s pozitivnimi členi, in je zato npr. $\sum_{j=k}^{\infty} c_k = \infty$.) Ko tako nadaljujemo, dobimo novo vrsto, v kateri so zapisani vsi členi prvotne vrste (7.9), in sicer vsak natanko enkrat. Razlike med delnimi vsotami nove vrste in s so omejene z b_{n_k+1} oziroma c_{n_k}. Ker je prvotna vrsta (7.9) konvergentna, konvergirajo njeni členi proti 0, torej gredo b_n in c_n proti 0, zato delne vsote preurejene vrste, ki smo jo dobili na ta način iz (7.9), konvergirajo proti s $\square$

Trditev 7.5. *(Integralski kriterij) Naj bo funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ zvezna (tj. njen graf je nepretrgan) in padajoča. Vrsta*

$$f(1) + f(2) + \ldots f(n) + \ldots \tag{7.14}$$

je konvergentna natanko tedaj, ko je $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.

Dokaz. Ker je funkcija f padajoča, je

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1) \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{7.15}$$

Od tod sledi

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots.$$

Ker je $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ in $f(n) \geq 0$ za vse n, trditev zlahka sledi iz gornje ocene. □

Zgled 7.6. Vrsta

$$1 + \frac{1}{2^r} + \ldots + \frac{1}{n^r} + \ldots$$

je konvergentna natanko tedaj, ko je $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r}\,dx < \infty$. Če je $r \neq 1$, je vrednost tega integrala, $[\frac{x^{-r+1}}{-r+1}]_1^{\infty}$, končna natanko tedaj, ko je $r > 1$. Če pa je $r = 1$, je vrednost integrala $\ln x|_1^{\infty} = \infty$. Torej je gornja vrsta konvergentna natanko tedaj, ko je $r > 1$.

Naloge. 1. (Abelov kriterij) Naj bo vrsta $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentna, (b_n) pa monotono omejeno zaporedje. Dokažite, da je vrsta $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$ konvergentna. (Naj bo $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Uporabite Dirichletov kriterij za dano vrsto in zaporedje $(b_n - b)$.)

2. Za katere r konvergira vrsta

$$\frac{\log 2}{2^r} + \frac{\log 3}{3^r} + \ldots + \frac{\log n}{n^r} + \ldots ?$$

3. Ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ konvergentna? Ali je absolutno konvergentna?

8. Limite in zveznost funkcij

Če je $D \subseteq \mathbb{R}$, je *funkcija* iz D v R, kar označimo kot

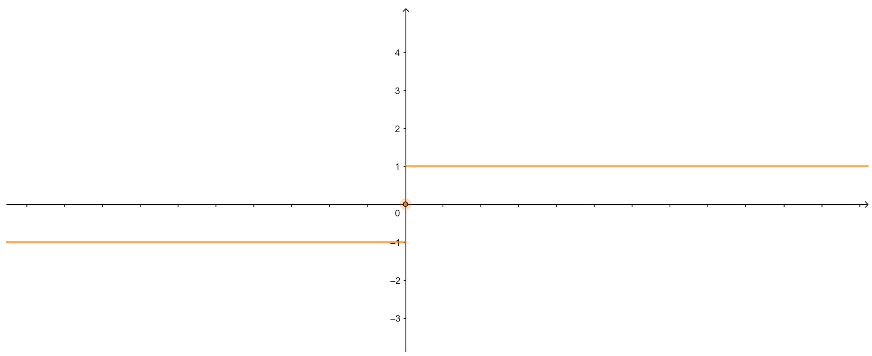
$$f : D \to \mathbb{R},$$

predpis, ki vsakemu $x \in D$ priredi natanko določeno število, ki ga označimo kot $f(x)$. Množico D imenujemo *domena* ali *definicijsko območje* funkcije f, množico $f(D) := \{f(x) : x \in D\}$ pa imenujemo *zaloga vrednosti* funkcije f in jo pogosto označimo z R. Funkcija ni nujno podana z eno samo formulo.

Zgled 8.1. Funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirano z

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{če je } x > 0; \\ 0, & \text{če je } x = 0; \\ -1, & \text{če je } x < 0, \end{cases}$$

imenujemo *funkcija predznak* ali *signum* in njeno vrednost v točki x običajno označimo kot $\operatorname{sgn}(x)$. Graf te funkcije je v točki $x = 0$ pretrgan. Ko se x bliža k 0 z leve



Slika 8. Graf funkcije signum

strani, ostajajo vrednosti te funkcije -1, njihova limita je zato -1. To bomo izrazili kot: leva limita funkcije $\operatorname{sgn}(x)$, ko gre x proti 0, je -1. S simboli to povemo kot

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1.$$

Podobno je

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

Seveda moramo definirati pojma leve in desne limite za splošno funkcijo. (Mimogrede, kaj je zaloga vrednosti funkcije signum?)

Število A bomo imenovali limita funkcije f, ko se x bliža k a, če se vrednosti $f(x)$ bližajo k A, ko gre x proti a. To pomeni, da je razlika $|f(x) - A|$ tako majhna kot hočemo, če je le razlika $|x - a|$ dovolj majhna. Pri tem bomo gledali le $x \neq a$. Natančneje to definicijo povemo takole:

Definicija 8.2. Število $A \in \mathbb{R}$ je *limita funkcije* $f : D \to \mathbb{R}$, ko gre x proti a, kar simbolično zapišemo kot

$$A = \lim_{x\to a} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$ iz $0 < |x - a| < \delta$ sledi, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Podobno definiramo levo in desno limito. Zapišimo le definicijo leve limite:

$$L = \lim_{x\to a^-} f(x) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in D \text{ in } 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Funkcija f je *zvezna v točki* $a \in D$, če obstaja $\lim_{x\to a} f(x)$ in je enaka $f(a)$. Simbolično lahko definicijo zveznosti v točki a zapišemo takole:

(8.1)

$$f \text{ je zvezna v } a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in D \text{ in } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Funkcijo f imenujemo *zvezna*, če je zvezna v vsaki točki svojega definicijskega območja.

Zgled 8.3. (i) Najenostavnejša funkcija je konstantna, ki ima enako vrednost, recimo c, za vse $x \in \mathbb{R}$, torej $f(x) = c$. Ta funkcija je očitno zvezna v vsaki točki

a, saj $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Tukaj bi lahko za δ, ki nastopa v definiciji zveznosti, vzeli katerokoli pozitivno število.

(ii) Tudi identična funkcija, $\iota(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$, je povsod zvezna, saj velja $|\iota(x) - \iota(a)| = |x - a| < \varepsilon$, če je $|x - a| < \delta$, kjer za δ lahko vzamemo katerokoli pozitivno število, manjše ali enako ε.

(iii) Nekoliko manj trivialen zgled je funkcija $f(x) = x^2$. Tukaj je $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$. Da bo to pod ε, če je $|x - a| < \delta$ (torej $|x| < |a| + \delta$ in $|x + a| < 2|a| + \delta$), izberimo $\delta > 0$ tako majhen, da je

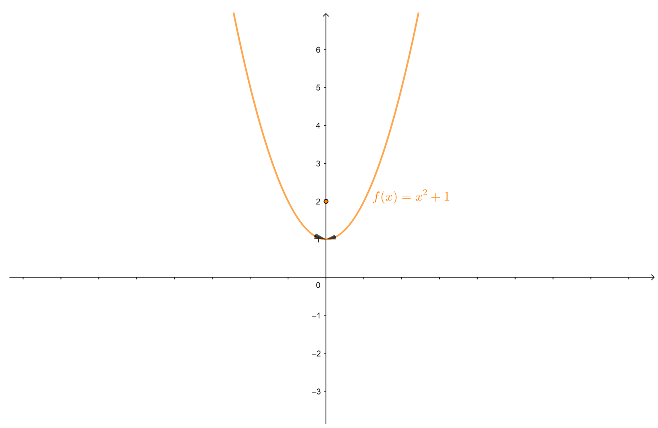
$$\delta(2|a| + \delta) \leq \varepsilon.$$

To je mogoče, saj lahko izberemo $\delta < 1$ in δ manjši tudi od $\frac{\varepsilon}{2|a|+1}$. (Ni pa mogoče izbrati takega pozitivnega δ, ki bil ustrezen istočasno za vse $a \in \mathbb{R}$, vendar to tukaj ni pomembno.)

Zgled 8.4. Za funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

je $\lim_{x \to 0} = 1$ in $f(0) = 2$, ta funkcija torej ni zvezna v točki 0.



Slika 9. $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

Zgled 8.5. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definirana z

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

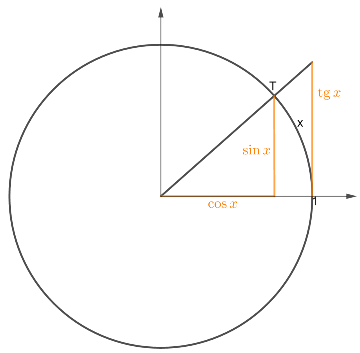
Kako moramo definirati $f(1)$, če naj bo f zvezna v točki 1?

Ker je

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2},$$

mora biti $f(1) = \frac{1}{2}$, če naj bo f zvezna v točki 1.

Zgled 8.6. Izračunajmo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$
Ker je $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, se smemo omejiti na pozitivne x. Iz slike vidimo, da je



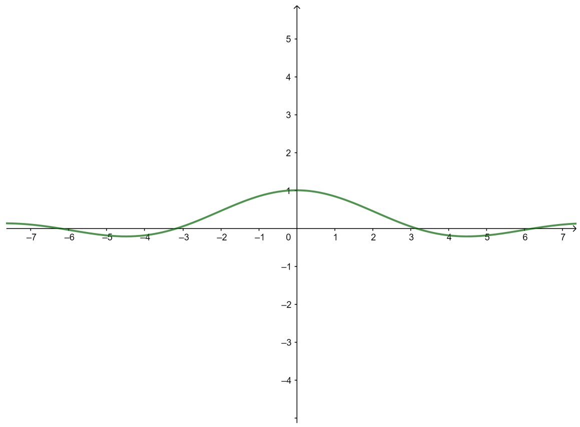
Slika 10. $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$. Tukaj je x lok med 1 in T.

tedaj $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. (Zadnja neenakost morda ni očitna, sledi pa iz dejstva, da je ploščina krožnega izseka (ki jo lahko dobimo tako, da razdelimo izsek na zelo ozke trikotnike z višinami pribliňo 1 in osnovnicami Δx, seštejemo njihove ploščine ter limitiramo Δx proti 0) enaka $\frac{x}{2}$, in je očitno manjša od ploščine trikotnika z osnovnico 1 (tj. daljico med 0 in 1) ter višino $\operatorname{tg} x$.) Ker je $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, lahko ti oceni napišemo kot
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$
Ker gre očitno $\cos x$ proti 1, ko gre x proti 0, sledi iz gornje ocene, da mora biti
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Imenujmo funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ *po zaporedjih zvezno* v točki $a \in D$, če za vsako zaporedje $(x_n) \subseteq D$, ki konvergira proti a, konvergira zaporedje $(f(x_n))$ proti $f(a)$.

Trditev 8.7. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je v točki a zvezna natanko tedaj, ko je po zaporedjih zvezna v tej točki.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je f zvezna v točki a in naj bo $(x_n) \subseteq D$ zaporedje, ki konvergira proti a. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokazati moramo, da zaporedje $(f(x_n))$ konvergira proti $f(a)$, torej, da je $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ za vse dovolj velike n. Ker je f zvezna v točki a, obstaja tak $\delta > 0$, da velja $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, kakor hitro je $|x - a| < \delta$. Ker zaporedje (x_n) konvergira proti a, obstaja tak $n(\delta) \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n(\delta)$ velja $|x_n - a| < \delta$. Za vse $n \geq n(\delta)$ torej velja $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$, kar



Slika 11. Graf funkcije $\frac{\sin x}{x}$

pove, da zaporedje $(f(x_n))$ konvergira proti $f(a)$. S tem smo pokazali, da je f po zaporedjih zvezna v točki a.

Za dokaz v obratno smer, privzemimo, da f ni zvezna v točki $a \in D$. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstaja kak tak $x \in D$, da je $|x - a| < \delta$ in kljub temu $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Pri fiksnem takem ε potem lahko izberemo za δ zaporedoma števila $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$. Za $\delta = \frac{1}{n}$ obstaja tak x, ki ga bomo imenovali x_n, da je

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \tag{8.2}$$

a kljub temu

$$|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon. \tag{8.3}$$

Neenakost (8.2) pove, da zaporedje (x_n) konvergira proti a. Neenakost (8.3) pa pove, da zaporedje $(f(x_n))$ ne konvergira proti $f(a)$. Torej funkcija f ni po zaporedjih zvezna v točki a. $\square$

Prejšnja trditev nam omogoča enostaven dokaz dejstva, da so vsota, razlika, produkt in kvocient zveznih funkcij zvezne funkcije. *Vsota*, *razlika*, *produkt* in *kvocient* funkcij $f, g :\to \mathbb{R}$ so funkcije, definirane z

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (f-g)(x) = f(x)-g(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x),\ (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definicijsko območje prvih treh je kar D, definicijsko območje funkcije $\frac{f}{g}$ pa je $\{x \in D :\ g(x) \neq 0\}$.

Trditev 8.8. *Vsota, razlika, produkt in kvocient zveznih funkcij so zvezne funkcije.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali za kvocent $\frac{f}{g}$, saj so dokazi za vsoto, razliko in produkt podobni. Pokazati moramo, da je funkcija $\frac{f}{g}$ po zaporedjih zvezna v vsaki točki a svojega definicijskega območja, torej v vsaki točki skupnega definicijskega območja D funkcij f in g, v kateri je $g(a) \neq 0$. Naj bo torej $(x_n) \subset D \setminus \{x \in D : g(x) = 0\}$ zaporedje, ki konvergira proti a. Ker sta funkciji f in g zvezni v točki a, konvergirata zaporedji $(f(x_n))$ in $(g(x_n))$ proti $f(a)$ in $g(a)$. Ker je $g(a) \neq 0$, konvergira zaporedje $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ proti $\frac{f(a)}{g(a)}$, kar smo hoteli dokazati. □

Iz prejšnje trditve sledi npr., da je za vsako konstanto $k \in \mathbb{R}$ funkcija $x \mapsto kx$ zvezna, saj je enaka produktu konstantne funkcije z identično funkcijo $\iota(x) = x$. Potem pa je za vsako konstanto n zvezna tudi vsota $f(x) = kx+n$, skratka linearne funkcije so zvezne.

Tudi funkcija $f_2(x) := x^2$ je (kot produkt $f = \iota\iota$) zvezna. Produkt te funkcije s funkcijo ι je funkcija $f_3(x) = x^3$, ki mora biti tudi zvezna. Na ta način z indukcijo ugotovimo, da so vse potence $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ zvezne funkcije. Če te potence pomnožimo s konstantami in nato dobljene funkcije zaporedoma seštevamo, ugotovimo, da so vsi polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \quad (a_n \in \mathbb{R})$$

zvezne funkcije. Tudi vsaka racionalna funkcija, tj. kvocient $\frac{p}{q}$ dveh polinomov, je zvezna na svojem definicijskem območju.

Definicija 8.9. Za dve taki funkciji f in g, da je zaloga vrednosti $f(D_f)$ vsebovana v domeni D_g je njun *kompozitum* funkcija $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$, definirana z

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in D_f).$$

Zgled 8.10. Za funkciji $f(x) = x^2$ in $g(x) = \sin x$ je

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2 \quad \text{in} \quad (g \circ f)(x) = \sin(x^2).$$

Tudi v primeru, ko sta oba kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$ definirana, ni nujno $f \circ g = g \circ f$, torej komponiranje funkcij ni komutativno.

Trditev 8.11. *Komponiranje funkcij je asociativno:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

za poljubne take funkcije z definicijskimi območji D_f, D_g in D_h, da je $f(D_f) \subseteq D_g$ in $g(D_g) \subseteq D_h$.

Naloga. Dokažite prejšnjo trditev.

Trditev 8.12. *Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija.*

Dokaz. Pokazati moramo, da je funkcija $g \circ f$ po zaporedjih zvezna v vsaki točki $a \in D_f$ njenega definicijskega območja. Naj bo torej $(x_n) \subseteq D_f$ zaporedje, ki konvergira proti a. Ker je f zvezna, konvergira zaporedje $(f(x_n))$ proti $f(a)$. Ker je g zvezna v točki $f(a)$, konvergira zaporedje $(g(f(x_n))$ proti $g(f(a))$. Ker je $g(f(x_n)) = (g \circ f)(x_n)$, to dokazuje trditev. □

Eksponentna funkcija $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ in trigonometrijske funkcije

$$x \mapsto \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$$

so zvezne; to bo sledilo kasneje, ko bomo dokazali, da so vse te funkcije odvedljive. Iz prejšnje trditve potem sledi, da so zvezni npr. tudi naslednje funkcije:

$$f(x) = \sin(x^2 + 1),\ g(x) = e^{\sin x},\ h(x) = \cos(2^x), \ldots.$$

Vse te funkcije se namreč dajo na očiten način izraziti kot kompozitumi zveznih funkcij.

9. Asimptote

Definicija 9.1. Premico $y = c$ imenujemo *vodoravna asimptota* funkcije f, če se vrednosti $f(x)$ približujejo konstanti c, ko gre x proti ∞ ali pa proti $-\infty$, torej, ko je

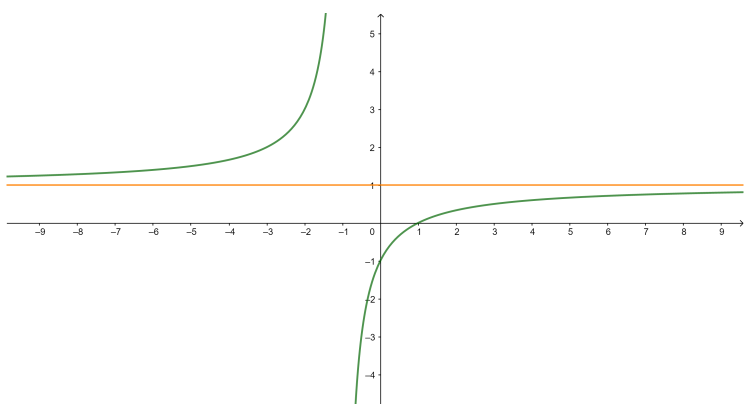
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \quad \text{ali} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = c.$$

Pri tem npr. pogoj $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $A \in \mathbb{R}$, da je $|f(x) - c| < \varepsilon$, kakor hitro je $x \geq A$.

Zgled 9.2. Pri funkciji $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ je

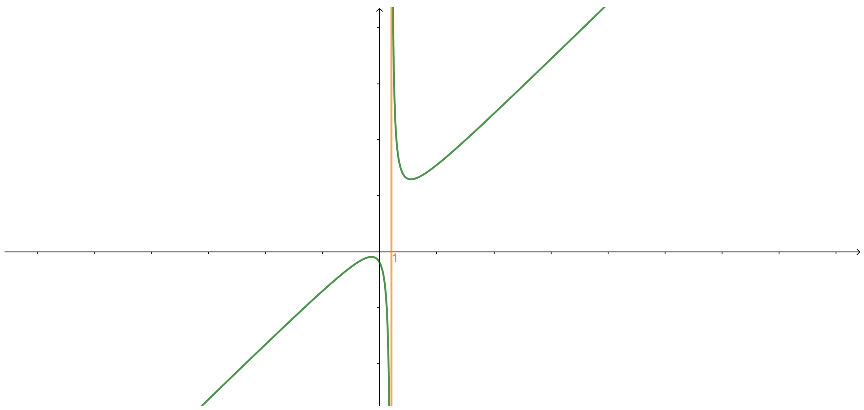
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

zato je premica $y = 1$ vodoravna asimptota te funkcije.



Slika 12. Graf funkcije $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ in njegova vodoravna asimptota

Definicija 9.3. Ko se x iz definicijskega območja D funkcije f približuje kaki vrednosti $a \notin D$ z leve ali pa desne strani, se lahko zgodi, da gredo vrednosti $f(x)$ proti $\pm\infty$. Tedaj pravimo, da ima funkcija f v točki a *navpično asimpoto*. Pri tem pogoj $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ pomeni, da za vsak $A \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \geq A$, kakor hitro je $0 < a - x < \delta$. Podobno so definirane tudi limite $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ in $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.



SLIKA 13. Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ in njegova navpična asimptota

Zgled 9.4. Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ ima za navpično asimptoto premico $x = 1$. V splošnem ima racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$, kjer sta p in q tuja si polinoma, navpično asimptoto v realnih polih, tj. v realnih ničlah polinoma q.

Definicija 9.5. Premica $y = kx + n$ $(k \neq 0)$ je *poševna asimptota* funkcije f, če je izpolnjen vsaj eden od pogojev

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+n)] = 0, \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - (kx+n)] = 0.$$

Pri tem npr. prvi pogoj pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $A \in \mathbb{R}$, da za vse $x \geq A$, ki so v domeni funkcije, velja $|f(x) - (kx+n)| < \varepsilon$.

Kako izračunamo k in n? Iz pogoja $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+n)] = 0$ sledi, da je tudi $\lim_{x\to\infty} \frac{[f(x)-(kx+n)]}{x} = 0$, se pravi

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x} - k + \frac{n}{x}] = 0.$$

Od tod dobimo, da je

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Nato iz $\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - n] = 0$ izračunamo še

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

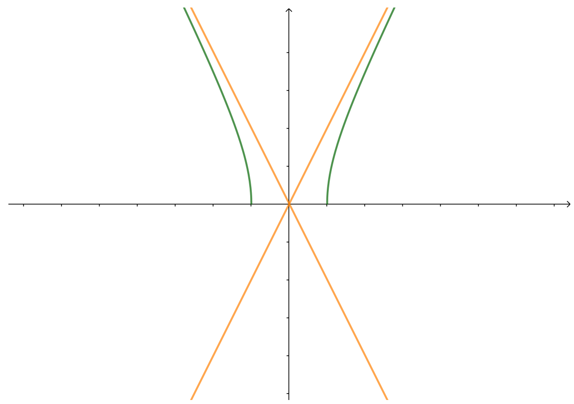
Podobni formuli veljata tudi, ko gre x proti $-\infty$.

Zgled 9.6. Za funkcijo $f(x) = 2\sqrt{x^2-1}$ je

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} = 2\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 2$$

in

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} = -2\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -2.$$



SLIKA 14. Graf funkcije $f(x) = 2\sqrt{x^2-1}$ in njegovi poševni asimptoti

Nadalje je

$$n_1 = \lim_{x\to\infty}[2\sqrt{x^2-1} - 2x] = 2\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

in podobno $n_2 = 0$. Asimptoti sta tako $y = 2x$ in $y = -2x$.

Naloge1. Pokažite, da ima racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$ vodoravno asimptoto natanko tedaj, ko je stopnja polinoma q večja ali enaka stopnji polinoma p. Kdaj je asimptota kar abscisna os?

2. Pokažite, da ima racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$ poševno asimptoto natanko tedaj, ko je stopnja polinoma p za 1 večja od stopnje polinoma q. Tedaj je $f(x) = kx + n + \frac{c(x)}{q(x)}$, kjer sta k, n konstanti, c polinom nižje stopnje kot q, asimptota pa je kar premica $y = kx + n$.

3. Določite vse asimptote za funkcijo $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$.

10. Lastnosti zveznih funkcij

Graf zvezne funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je nepretrgana krivulja. Če je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$ (ali pa obratno), mora ta krivulja sekati abscisno os, torej ima funkcija f vsaj eno realno ničlo. To dejstvo bomo dokazali brez sklicevanja na predstavo, ki temelji na sliki, ki jo lahko narišemo na papir. Krivulja na sliki je namreč sestavljena iz pik, ki so sestavljene iz molekul in ni zanesljiv model tistega, kar si zamišljamo kot neprekinjeno krivuljo.

Trditev 10.1. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $f(a)f(b) \le 0$. Potem obstaja taka točka $s \in [a,b]$, da je $f(s) = 0$.*

Dokaz. Predpostaviti smemo, da je $f(a) \le 0$, sicer bi obravnavali funkcijo $-f$. Potem množica $S = \{x \in [a,b] : f(t) \le 0 \ \forall t \in [a,x]\}$ vsebuje a, in ker je navzgor omejena, obstaja $s := \sup S$. Trdimo, da je $f(s) = 0$.

Ker je s natančna zgornja meja za S, vsak interval $(s - \frac{1}{n}, s]$ vsebuje kak element $s_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zaporedje (s_n) konvergira proti s, zato zaporedje $(f(s_n))$ konvergira proti $f(s)$, saj je f zvezna. Ker je $s_n \in S$, je $f(s_n) \le 0$ in sledi $f(s) \le 0$ Če bi bilo $f(s) < 0$, najprej opazimo, da je $s \ne b$, saj je $f(b) \ge 0$. Če bi bilo $f(s) < 0$, bi zaradi zveznosti obstajal tak $\delta > 0$, da bi bilo $f(x) < 0$ za vse $x \in (s-\delta, s+\delta) \cap [a,b]$. (To spoznamo, če v definiciji zveznosti vzamemo $\varepsilon = |f(s)|$.) Če izberemo δ dovolj majhen, je $[s, s+\delta) \subseteq [a,b]$ in sledi, da je $[s, s+\delta) \subseteq S$. Toda potem s ni zgornja meja množice s (saj je npr. $s + \delta/2 \in S$). To je protislovje, torej mora biti $f(s) = 0$. $\square$

V praksi lahko ničlo funkcije f določimo do poljubne natančnosti npr. z metodo *bisekcije*. Če je npr. $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$, pogledamo vrednost funkcije v razpolovišču $c = \frac{a+b}{2}$ intervala $[a,b]$. Če je $f(c) > 0$, mora biti kaka ničla na intervalu $[a,c]$, če pa je $f(c) < 0$, mora biti ničla na intervalu $[c,b]$. Ta postopek razpolavljanja intervala, na katerem je vsaj ena ničla, lahko nadaljujemo, dokler ne dobimo tako kratkega intervala, kot zahteva željena natančnost določitve ničle.

Definicija 10.2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *omejena* (navzgor, navzdol), če je taka njena zaloga vrednosti $f(D)$. Navzgor je omejena torej takrat, kadar obstaja kak tak $M \in \mathbb{R}$, da velja $f(x) \le M$ za vse $x \in D$. Vsak tak M imenujemo *zgornja meja funkcije* in najmanjšo med zgornjimi mejami imenujemo *supremum* ter označimo z $\sup f$. Podobno je definirana največja med spodnjimi mejami ali *infimum*, ki ga označimo z $\inf f$.

Nemogoče si je zamisliti neomejeno zvezno funkcijo, definirano na zaprtem intervalu.

Trditev 10.3. *Vsaka zvezna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omejena (navzgor in navzdol).*

Dokaz. Privzemimo nasprotno, da f npr.ni navzgor omejena. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja kak tak $x_n \in [a,b]$, da je $f(x_n) > n$. Zaporedje (x_n) je omejeno (navzdol z a, navzgor pa z b) in ima zato vsaj eno stekališče $s \in [a,b]$. Ker je f zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(s)| < 1$, če je $|x - s| < \delta$. Toda, ker je s stekališče zaporedja (x_n), je v intervalu $(s - \delta, s + \delta)$ neskončno mnogo členov x_n, zanje torej velja $|f(x_n) - f(s)| < 1$. To ima za posledico $|f(x_n)| < |f(s)| + 1$, in ker je $f(x_n) > n$, bi sledilo, da je $n < |f(s)| + 1$ za neskončno mnogo indeksov n, kar je očitno nemogoče. Podoben argument pove, da je funkcija omejena tudi navzdol. $\square$

Naj pripomnimo, da gornja trditev ne velja za funkcije, definirane na odprtih ali polzaprtih intervalih. Npr. funkcija $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, definirana z $f(x) = \frac{1}{x}$, je zvezna, vendar ni navzgor omejena. Ni pa mogoče te funkcije razširiti do zvezne funkcije na celotnem zaprtem intervalu $[0,1]$.

Izrek 10.4. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, $m = \inf_{a \le x \le b} f(x)$ in $M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$. Funkcija f zavzame vsako vrednost med m in M, drugače rečeno, za vsak $c \in [m, M]$ obstaja tak $x_c \in [a,b]$, da je $f(x_c) = c$.*

Dokaz. Najprej bomo dokazali, da f zavzame vrednost M. Predpostavimo nasprotno, da je $f(x) \neq M$ (se pravi $f(x) < M$, ker je M zgornnja meja za f) za vsak $x \in [a,b]$. Potem je funkcija $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, definirana z

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

zvezna, zato omejena. Naj bo A kaka njena zgornja meja, torej

$$\frac{1}{M - f(x)} = g(x) \le A \ \forall x \in [a,b].$$

Od tod sledi, da je $f(x) \le M - \frac{1}{A}$, kar pomeni, da je $M - \frac{1}{A}$ zgornja meja za f. Toda to je nemogoče, saj je M najmanjša zgornja meja za f. Podobno dokažemo, da je f omejena navzdol (ali pa uporabimo pravkar dokazano na funkciji $-f$).

Naj bo sedaj $c \in (m, M)$ in $x_m, x_M \in [a,b]$ taka, da je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$. Funkcija $h : [x_m, x_M] \to \mathbb{R}$, definirana s $h(x) = f(x) - c$, je na krajiščih x_m in x_M nasprotno predznačena, saj je

$$h(x_m) = m - c < 0 \ \text{ in } \ h(x_M) = M - c > 0.$$

Torej mora imeti na intervalu $[x_m, x_M]$ vsaj eno ničlo, ki jo imenujmo x_c, torej je $h(x_c) = 0$. Tedaj je $f(x_c) - c = h(x_c) = 0$, kar pomeni $f(x_c) = c$. Ker je interval $[x_m, x_M]$ vsebovan v intervalu $[a,b]$, je $x_c \in [a,b]$. □

Ker zvezna funkcija f na zaprtem intervalu zavzame svoj supremum, ga bomo imenovali *maksimum* in označevali tudi z $\max f$. Podobno bomo infimum funkcije, ki ga zavzame, imenovali *minimum* in označili kot $\min f$.

Definicija 10.5. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *injektivna*, če za poljubna $x_1 \neq x_2$ iz D velja $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funkcijo $f : D \to E$ imenujemo *surjektivna*, če je vsak $y \in E$ slika kakega $x \in D$. Surjektivno in injektivno funkcijo $f : D \to E$ imenujemo *bijektivna funkcija* ali *bijekcija.*

Naloga. Premislite, da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ injektivna natanko tedaj, ko njen graf seka vsako vzporednico z abscisno osjo kvečjemu enkrat. Nadalje premislite, da je $f : D \to \mathbb{R}$ surjektivna natanko tedaj, ko njen graf seka vsako vzporednico z abscisno osjo vsaj enkrat.

Definicija 10.6. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *naraščajoča*, če za vsaka $x_1, x_2 \in D$ iz $x_1 < x_2$ sledi, da je $f(x_1) \le f(x_2)$. Če velja pri tem stroga neenakost, pravimo, da je f *strogo naraščajoča.*

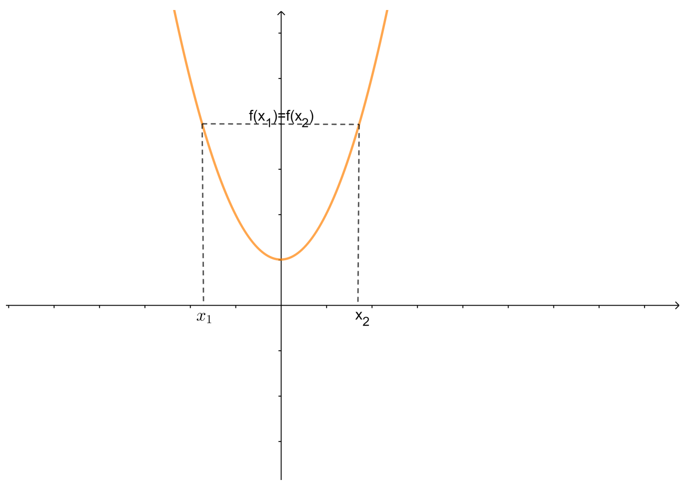
Podobno pravimo, da je f padajoča, če je $f(x_2) \le f(x_1)$, kakor hitro je $x_1 < x_2$. Skupno ime za naraščajoče in padajoče funkcije je *monotone funkcije.*

Očitno je vsaka strogo monotona funkcija injektivna. Obratno pa ni vedno res. Npr. funkcija $f : [a, b] \to [a, b]$, definirana z

$$f(x) = \begin{cases} b, & x = a; \\ x, & x \in (a, b); \\ a, & x = b \end{cases}$$

je injektivna in ni monotona, če je $a < b$.

Izrek 10.7. *Vsaka zvezna injektivna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je strogo monotona.*



Slika 15. Zvezna nemonotona funkcija ne more biti injektivna.

Dokaz. Predpostaviti smemo, da je $a < b$ in $f(a) < f(b)$ (sicer bi nadomestili f z $-f$). Naj bo $M = \max_{a \le x \le b} f(x)$ in $x_M \in [a, b]$ taka točka, da je $f(x_M) = M$. Če bi bila x_M notranja točka intervala, se pravi $x_M \in (a, b)$, potem bi funkcija f na intervalu $[a, x_M]$ zavzela vse vrednosti med $f(a)$ in $f(x_M) = M$ (in morda še kake druge), na intervalu $[x_M, b]$ pa vsaj vse vrednosti med $f(x_M)$ in $f(b)$. Ker je $f(a) < f(b)$, bi torej f na intervalu $[a, b]$ zavzela vsako vrednost iz intervala $(f(b), f(x_M))$ vsaj dvakrat (enkrat na intervalu (a, x_M) in enkrat na intervalu (x_M, b)). To bi nasprotovalo injektivnosti funkcije f, razen v primeru, ko je eden od delnih intervalov (a, x_M), (x_M, b) prazna množica, se pravi $x_M = a$ ali pa $x_M = b$. Ker je M maksimum funkcije f in $f(a) < f(b)$, pride v poštev le $x_M = b$. Torej zavzame f svoj maksimum v desnem, svoj minimum pa (s podobnim dokazom) v levem krajišču. To pomeni, da je $f(a) < f(x) < f(b)$ za vsak $x \in (a, b)$.

Naj bo sedaj $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in (a, b)$). Po tistem, kar smo dokazali v prejšnjem odstavku, velja $f(a) < f(x_1) < f(b)$ in $f(a) < f(x_2) < f(b)$. Toda, če uporabimo sklepanje iz prejšnjega odstavka na interval $[a, x_2]$ (namesto intervala $[a, b]$), spoznamo, da je $f(a) < f(x_1) < f(x_2)$. To pa pove, da je f strogo naraščajoča na $[a, b)$ in, ker je injektivna na $[a, b]$ in ima v b maksimum, tudi strogo naraščajoča na $[a, b]$. $\square$

Definicija 10.8. Naj bo $f : D \to R$ bijekcija, kar pomeni, da za vsak $y \in R$ obstaja natanko en tak $x \in D$, da je $f(x) = y$. Tedaj lahko definiramo funkcijo $f^{-1} : R \to D$ takole:

$$f^{-1}(y) := x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

To funkcijo imenujemo *inverzna funkcija funkcije* f.

Opazimo, da je domena funkcije f^{-1} enako zalogi vrednosti funkcije f, zaloga vrednosti funkcije f^{-1} pa enaka domeni funkcije f.

Naloge. 1. Bodita ι_D in ι_R identični funkciji na množicah D in R (torej $\iota_D(x) = x$ za vsak $x \in D$ in $\iota_R(y) = y$ za vsak $y \in R$). Pokažite, da je

$$\iota_R \circ f = f \quad \text{in} \quad f \circ \iota_D = f$$

za vsako funkcijo $f : D \to R$.

2. Pokažite, da je

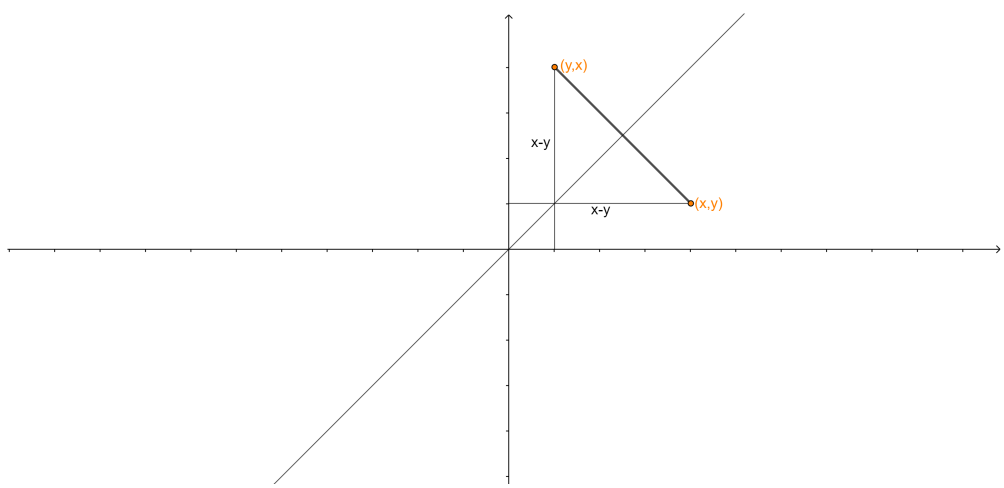
$$f^{-1} \circ f = \iota_D \quad \text{in} \quad f \circ f^{-1} = \iota_R$$

za vsako bijekcijo $f : D \to R$.

3. Pokažite, da je inverzna funkcija strogo naraščajoče funkcije tudi strogo naraščajoča, strogo padajoče pa strogo padajoča.

4. Pokažite, da je vsaka zvezna injektivna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona.

Za vsako točko $(x, f(x))$ na grafu G_f funkcije f, je točka $(f(x), x)$ na grafu $G_{f^{-1}}$ funkcije f^{-1} (saj je $f^{-1}(f(x)) = x$) in obratno. To pomeni, da lahko graf funkcije f^{-1} dobimo iz grafa funkcije f, tako, da vsaki točki (x, y) zamenjamo koordinati. Točki (y, x) in (x, y) sta si simetrični glede na premico $y = x$, zato lahko dobimo $G_{f^{-1}}$ kar tako, da G_f prezrcalimo prek te premice.



Slika 16. Zrcaljenje prek premice $y = x$

Zgled 10.9. Inverz exponentne funkcije $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ imenujemo logaritem z onsovo a, $f^{-1}(x) = \log_a x$. Tukaj je domena funkcije f enaka $\mathbb{R}$, zaloga vrednosti pa $(0, \infty)$. Logaritem je zato definiran le na poltraku $(0, \infty)$, njegova zaloga vrednosti pa je $\mathbb{R}$.

Naloge. 1. Kaj je inverzna funkcija potence, $f(x) = x^n$?

2. Pokažite, da je linearna funkcija $f(x) = kx + n$ bijekcija iz $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ natanko tedaj, ko je $k \neq 0$, in da je tedaj f^{-1} tudi linearna funkcija.

3. Izračunajte inverzno funkcijo funkcije $f(x) = x^3 + 1$.

Izrek 10.10. *Naj bo $f : [a, b] \to [c, d]$ zvezna bijekcija. Potem je tudi inverzna funkcija f^{-1} zvezna.*

Dokaz. Pokazali bomo, da je f^{-1} zvezna v vsaki notranji točki t intervala $[c, d]$, dokaz v robnih točkah je podoben. Po eni prejšnjih trditev je f bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča; obravnavali bomo le primer, ko je f strogo naraščajoča, saj primer padajoče funkcije sledi potem z zamenjavo f v $-f$. Naj bo $s = f^{-1}(t)$, torej $t = f(s)$. Naj bo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da je interval $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ vsebovan v $[a, b]$. (To je možno, saj je f^{-1} strogo monotona, zato preslika c v a in d v b, torej mora (zaradi injektivnosti) preslikati t v notranjo točko intervala $[a, b]$.) Funkcija f preslika interval $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ na interval $(f(s - \varepsilon), f(s + \varepsilon))$, ki vsebuje točko $t = f(s)$, ker je f monotona. Naj bo

$$\delta = \min\{t - f(s - \varepsilon), f(s + \varepsilon) - t\}.$$

Potem je interval $(t - \delta, t + \delta)$ vsebovan v intervalu $(f(s - \varepsilon), f(s + \varepsilon))$, zato ga f^{-1} preslika v interval $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Drugače rečeno, iz $|y - t| < \delta$ sledi $|f^{-1}(y) - f^{-1}(t)| < \varepsilon$, kar pove, da je f^{-1} zvezna v točki t. □

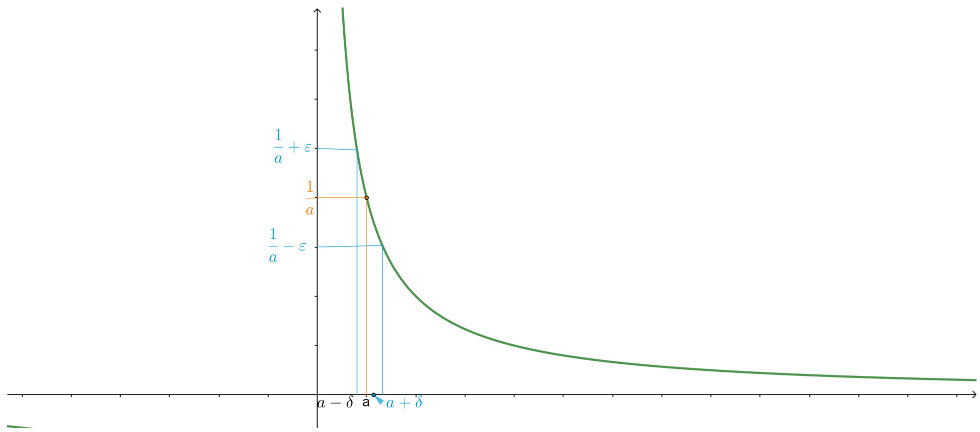
Naloga. Dokažite, da je inverzna preslikava vsake zvezne bijekcije $f : I \to J$ tudi zvezna, kjer sta I in J bodisi odprta intervala ali poltraka ali pa cela realna os.

11. Enakomerna zveznost

Po definiciji je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$ iz $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Pri tem je δ očitno odvisen od ε; čim manjši je ε, tem manjši mora biti v splošnem δ, da bo pogoj izpolnjen. Je pa δ v splošnem odvisen tudi od a, kot pove naslednji zgled.

Zgled 11.1. Funkcija $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definirana z $f(x) = \frac{1}{x}$, je zvezna v vsaki točki $a \in (0, \infty)$. Iz slike lahko opazimo, da je δ odvisen od a in da ne obstaja δ, ki bi bil (pri fiksnem ε) ustrezen v vseh točkah $a \in (0, \infty)$. Pokažimo to tudi računsko. Pri danem a in $\varepsilon > 0$, poglejmo, kakšen sme biti $\delta > 0$, da bo iz $|x - a| < \delta$ sledilo $|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$, se pravi $\frac{1}{x} \in (\frac{1}{a} - \varepsilon, \frac{1}{a} + \varepsilon)$, tj.

$$x \in (\frac{a}{1 + a\varepsilon}, \frac{a}{1 - a\varepsilon}).$$



Slika 17. Neenakomerna zveznost

Interval $(a-\delta, a+\delta)$ mora torej biti vsebovan v intervalu $(\frac{a}{1+a\varepsilon}, \frac{a}{1-a\varepsilon})$, torej za dolžini teh dveh intervalov velja

$$2\delta \leq \frac{a}{1-a\varepsilon} - \frac{a}{1+a\varepsilon} = \frac{2a^2\varepsilon}{1-a^2\varepsilon^2} \leq 2a^2\varepsilon \text{ (če je } \varepsilon < \frac{1}{a^2}\text{)}.$$

Ko gre a proti 0, gre tudi δ proti 0, saj je $\delta < a^2\varepsilon$, zato noben $\delta > 0$ ni ustrezen v vseh točkah $a > 0$.

Definicija 11.2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *enakomerno zvezna*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $t, x \in D$ iz $|x - t| < \delta$ sledi $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$.

Poanta v tej definiciji je v tem, da je isti δ ustrezen v vseh točkah $t \in D$. Očitno je vsaka enakomerno zvezna funkcija tudi zvezna, presenetljivo pa je, da na zaprtih intervalih velja tudi obratno:

Izrek 11.3. *Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna.*

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da f ni enakomerno zvezna. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstajata taka $t, x \in [a, b]$, da je $|x - t| < \delta$, a kljub temu $|f(x) - f(t)| \geq \varepsilon$. Ko za δ izbiramo zaporedoma $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, vidimo, da obstajajo taki $t_n, x_n \in [a, b]$, da je $|x_n - t_n| < \frac{1}{n}$, a kljub temu $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$. Naj bo s stekališče zaporedja (t_n). Ker je f zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da velja $|f(x) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$, kakor hitro je $|x - s| < \delta$. Ker je s stekališče zaporedja (t_n), velja neenakost $|t_n - s| < \frac{\delta}{2}$ za neskončno mnogo indeksov n. Ker je $|x_n - t_n| < \frac{1}{n}$, velja za vse dovolj velike take indekse tudi neenakost $|x_n - s| < \delta$. Za take n potem hkrati velja

$$|f(t_n) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in} \quad |f(x_n) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Toda od tod sledi, da je

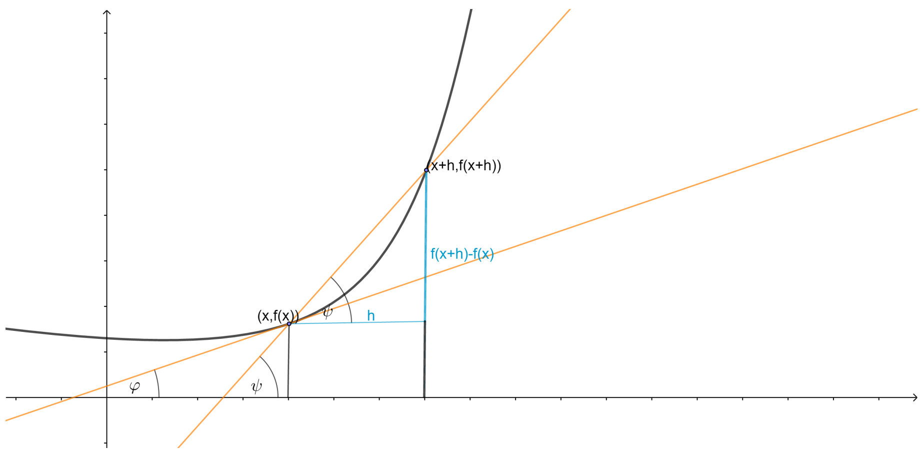
$$|f(x_n)-f(t_n)| = |(f(x_n)-f(s))+(f(s)-f(t_n))| \leq |f(x_n)-f(s)|+|f(t_n)-f(s)| < \varepsilon,$$

kar je v protislovju z začetno neenakostjo $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$. $\square$

Sekanta skozi točki $(x, f(x))$ in $(x+h, f(x+h))$ grafa funkcije $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ima smerni koeficient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ko gre h proti 0, se ta smerni koeficient približuje smernemu koeficientu tangente na graf v točki $(x, f(x))$. Limita teh smernih koeficientov je tako pomembna, da ima posebno ime in nastopa vsebovsod v matematiki in njeni uporabi.



Slika 18. $\operatorname{tg}\psi = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\operatorname{tg}\varphi = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Definicija 12.1. *Odvod funkcije $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ v točki $x \in (a,b)$* je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{12.1}$$

Če ta limita obstaja, pravimo, da je funkcija f *odvedljiva v točki x*. Funkcijo imenujemo *odvedljiva*, če je odvedljiva va vsaki točki svojega definicijskega območja (a,b). (Pri tem dopučamo možnost, da je $a = -\infty$ ali $b = \infty$.)

Zgled 12.2. Oglejmo si nekaj zgledov odvedljivih funkcij.

(i) Pri funkciji $f(x) = x^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{1}{h}[x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n] \\ &= nx^{n-1} + h[\binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + h^{n-1}].\end{aligned}$$

Torej je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + h[\binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + h^{n-1}]\right] = nx^{n-1}.$$

To bomo na kratko zapisali kar kot

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

(ii) Pri funkciji $f(x) = \sin x$, je

$$f(x+h) - f(x) = \sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x,$$

zato

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1-\cos h}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - 2\sin x \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h}.$$

Ker že vemo, da je $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ in zato

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} (\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}})^2 \frac{h}{4} = 0,$$

sledi, da je $f'(x) = \cos x$. Torej je

$$\sin' x = \cos x.$$

Podobno bi ugotovili, da je

$$\cos' x = -\sin x.$$

(iii) Pri eksponentni funkciji $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ imamo

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Da bi izračunali $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$, vpeljimo $m = \frac{1}{a^h-1}$. Ko gre h proti 0, gre a^h proti 1. (Če je namreč $h = \frac{1}{n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, je $a^h = \sqrt[n]{a}$, kar gre, kot že vemo, proti 1 ko gre n proti ∞. V splošnem pa je za majhne pozitivne h, $h \leq \frac{1}{n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ velik, in, če je $a > 1$, je $0 < a^h - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1$, kar gre proti 0, ker gre n proti ∞. Če pa je $h < 0$ in $a > 1$, je $0 < 1 - a^h < a^{|h|} - 1$ (saj je $2 < a^h + a^{-h}$, ker je $2 < t + \frac{1}{t}$ za vsak $t \neq 0$). Kadar je $a \in (0,1)$ pa si pomagamo z zvezo $a^h = (\frac{1}{a})^{-h}$).) Torej gre m proti ∞ in, ko iz zveze $a^h - 1 = \frac{1}{m}$ izrazimo h kot $h = \frac{\ln(1+\frac{1}{m})}{\ln a}$, dobimo

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln a}{m \ln(1+\frac{1}{m})} = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln a}{\ln(1+\frac{1}{m})^m} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a.$$

Pri tem smo molče uporabili dejstvo, daje logaritem zvezna funkcija (kar sledi iz zveznosti eksponentne funkcije, katere inverz je, zveznost le te pa se reducira na zvetnost v točki 0, kjer uporabimo zvezo $\lim_{h\to 0} a^h = 1$). Uporabili smo tudi dejstvo, da je $\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = e$, čeprav smo ga doslej dokazali le v primeru, ko m teče po celih številih, tukaj pa števila m niso nujno cela. Odpravo te pomanjkljivosti bomo opisali v navodilu k naslednji nalogi. Potem bo dokazano, da je

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Kot poseben primer te formule imamo

$$(e^x)' = e^x.$$

Naloga. Za vsak $m \in \mathbb{R}$ naj bo $[m]$ njegov celi del. Pokažite, da je $\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{[m]}$ in da gre razlika $(1+\frac{1}{[m]})^{[m]} - (1+\frac{1}{m})^{[m]}$ proti 0, ko gre m proti ∞, od koder sledi, da je

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = \lim_{[m]\to\infty}(1+\frac{1}{[m]})^{[m]} = e.$$

(Navodilo. Za dani $m > 0$ označimo $n = [m]$, $a = 1+\frac{1}{n}$ in $b = 1+\frac{1}{m}$. Potem je

$$\begin{aligned} 0 < a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &\le n(a-b)a^{n-1} = \frac{m-n}{m}(1+\frac{1}{n})^{n-1}. \end{aligned}$$

Ker je $m - n \in [0,1)$, gre $\frac{m-n}{m}$ proti 0, ko gre m proti ∞ in iz zadnje ocene sledi, da gre $a^n - b^n$ proti 0.)

12.1. **Lastnosti, ki olajšajo računanje odvodov.** Vsakokratno računanje odvodov po definiciji bi bilo zamudno, zato bomo spoznali nekaj pravil, ki olajšajo to delo.

Trditev 12.3. *Vsota, razlika, produkt in kvocient odvedljivih funkcij so odvedljive funkcije in velja*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),\ \ (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x),$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\ \ (\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dokaz. Po definiciji odvoda in seštevanja funkcij imamo

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}] = f'(x) + g'(x) = (f+g)'(x).$$

Dokaz za odvod razlike funkcij je podoben in ga bomo opustili.

Oglejmo si sedaj odvod produkta:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Pri tem smo molče uporabili dejstvo, da gre $g(x+h)$ proti $g(x)$, ko gre h proti 0, ki pomeni, da je g zvezna. Za dokaz tega dejstva, upoštevajmo, da gre kvocient $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ proti $g'(x)$, ko gre h proti 0. Ker gre v tem ulomku imenovalec h proti 0, mora konvergirati proti 0 tudi števec $g(x+h) - g(x)$, sicer ulomek ne bi mogel konvergirati proti končnemu številu.

Končno obravnavajmo še odvod kvocienta:

$$(\frac{f}{g})'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

□

Pravilo za odvod produkta, $(fg)' = f'g + fg'$ imenujemo *Leibnizova formula.* V njenem dokazu smo spoznali pomembno dejstvo, ki ga je potrebno navesti posebej:

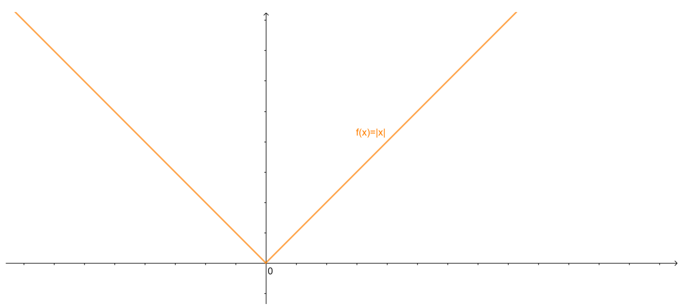
Trditev 12.4. *Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.*

Naslednji zgled pove, da obrat te trditve ne velja, ni namreč vsaka zvezna funkcija odvedljiva.

Zgled 12.5. Funkcija $f(x) = |x|$ je zvezna. Ni pa odvedljiva v točki 0, saj je

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0; \\ -1, & h < 0 \end{cases}$$

in zato limita teh kvocientov, ko gre h proti 0, ne obstaja. To je razvidno tudi iz



Slika 19. Funkcija $f(x) = |x|$ v točki $x = 0$ nima enolične tangente, zato tam ni odvedljiva.

slike, saj graf funkcije $x \mapsto |x|$ v točki $x = 0$ nima enolične tangente.

Zgled 12.6. (i) Poseben primer Leibnizove formule dobimo, ko je ena od funkcij, recimo g, konstantna, torej $g(x) = c$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Tedaj je $g'(x) = 0$ za vse x in pravilo se glasi

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

(ii) S pomočjo pravkar navedenega, pravila za odvod vsote in odvod potence $((x^n)' = nx^{n-1})$, lahko odvajamo poljuben polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + ma_mx^{m-1}.$$

(iii) Pravilo za odvod kvocientov omogoča npr. odvajanje racionalnih funkcij. Za zgled izračunajmo

$$(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1})' = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

(iv) Pravilo za odvod kvocienta omogoča tudi izračun odvodov trigonometrijskih funkcij tg in ctg :

$$\operatorname{tg}' x = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Torej je

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{in podobno} \quad \operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Oglejmo si sedaj še, kako se odvaja kompozitum dveh funkcij.

Trditev 12.7. *Odvod kompozituma $g \circ f$ dveh odvedljivih funkcij se izraža kot*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Dokaz. Označimo $u = f(x)$ in $k = f(x+h) - f(x)$. Potem je $f(x+h) = f(x) + k = u + k$ in lahko zapišemo, kadar je $k \neq 0$,

$$\frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(h)}{h}$$
$$= \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(u+k) - g(u)}{k} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ta enakost velja tudi v primeru $k = 0$, če interpretiramo kvocient $\frac{g(u+k)-g(u)}{k}$ kot 0. Ko gre h proti 0, gre tudi k proti 0 (ker so odvedljive funkcije zvezne), zato gre izraz na skrajni desni strani gornje formule proti $g'(u)f'(x)$, kar je bilo treba dokazati. □

Formulo za odvod kompozituma izgleda naravno, če jo zapišemo z *Leibnizovimi oznakami za odvode.* Spremembo h neodvisne spremenljivke x je v navadi označiti tudi z Δx in z dx; spremembo funkcijske vrednosti $y = f(x)$ pa z Δy, torej $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. *Diferenčni kvocient* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lahko potem zapišemo kot

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Odvod f' označimo kot $\frac{dy}{dx}$, torej je

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x).$$

Pri tem si predstavljamo $\frac{dy}{dx}$ kot kvocient dveh "infinitezimalno majhnih" količin.

Pri kompozitumu $g \circ f$ dveh funkcij, označimo $u = f(x)$ in $y = g(f(x)) = g(u)$, tako, da je y posredna funkcija spremenljivke x, namreč prek spremenljivke u. Pravilo za odvod posredne funkcije lahko sedaj na kratko zapišemo kot

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy}{du}(u)\frac{du}{dx}(x)$$

oziroma, če opustimo pisanje spremenljivk, kar kot

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Če bi tukaj oznake pomenile ulomke, bi bilo pravilo očitno, saj bi se du pokrajšal, vendar pa ne gre za kvociente, temveč za limite kvocientov.

Zgled 12.8. Funkcijo $y = e^{\sin x}$ imamo lahko za posredno funkcijo in sicer kot $y = e^u$, kjer je $u = \sin x$. Po pravilu za posredno odvajanje je $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du} e^u \frac{du}{dx} = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x$.

Podobno lahko izračunate, da je $(\cos(x^3 - 2x))' = -(3x^2 - 2) \sin(x^3 - 2x)$.

12.2. **Diferencial.** Označimo

$$\eta(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x). \tag{12.2}$$

Po definiciji odvoda, je

$$\lim_{h \to 0} \eta(x,h) = 0.$$

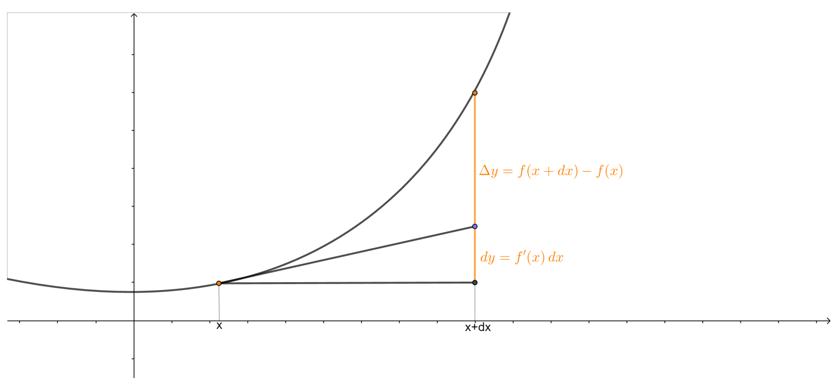
Iz (12.2) lahko izrazimo

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \eta(x,h)h. \tag{12.3}$$

Ker gre pri tem (pri fiksnem x) izraz $\eta(x,h)$ proti 0, ko gre h proti 0, je za majhne h produkt $\eta(x,h)h$ majhen v primerjavi s h in tako tudi v primerjavi z $f'(x)h$, če je $f'(x) \neq 0$. Tedaj je $f'(x)h$ dober približek za spremembo $f(x+h) - f(x)$ vrednosti funkcije f. Pri fiksnem x je funkcija $h \mapsto f'(x)h$ linearna, imenujemo jo diferencial funkcije f v točki x.

Definicija 12.9. *Diferencial* odvedljive funkcije f v točki x je funkcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$, definirana z

$$h \mapsto f'(x)h.$$



SLIKA 20. Diferencial in sprememba funkcijske vrednosti

V navadi je pisati $dx = h$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ in $dy = f'(x)\,dx$. Potem lahko enakost (12.3) zapišemo kot

$$\Delta y = f'(x)\,dx + o(x,dx) = dy + o(x,dx), \tag{12.4}$$

kjer smo označili $o(x,dx) = \eta(x,dx)\,dx$. Za majhne dx je "ostanek" $o(x,dx)$ majhen v primerjavi z dx in diferencial dy je tedaj dober približek za spremembo Δy vrednosti funkcije v smislu, da je razlika $\Delta y - dy$ majhna v primerjavi z dx. Natančneje, $\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y - dy}{dx} = 0$. To dejstvo lahko izkoristimo za računanje približnih vrednosti funkcij.

Zgled 12.10. Za koliko se spremeni prostornina krogle, če povečamo njen polmer za $\frac{1}{1000}$?

Prostornina krogle s polmerom r je $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Če polmer povečamo za dr, je sprememba prostornine $\Delta V = \frac{4}{3}\pi[(r+dr)^3 - r^3]$. Relativna sprememba prostornine je

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(r+dr)^3 - r^3}{r^3} = (1 + \frac{dr}{r})^3 - 1 = (1 + \frac{1}{1000})^3 - 1 = 0.003003001.$$

Diferencial pa je $dV = V'(r)\,dr = 4\pi r^2\,dr$, zato je z diferencialom ocenjena relativna sprememba prostornine

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r} = 3 \cdot 0.001 = 0.003.$$

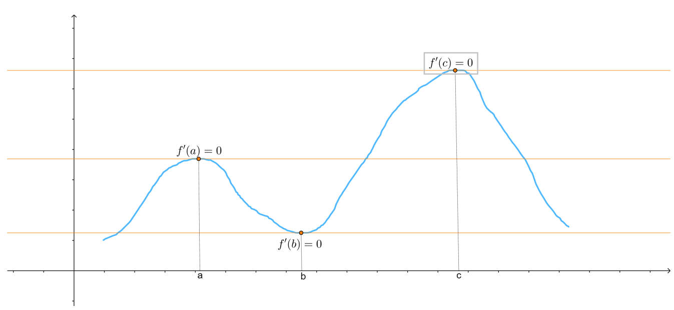
Naloga. Izračunajte, brez uporabe naprav, približno vrednost za $\sin 46°$. (Navodilo: $\sin(x+h) \approx \sin x + \cos x\, h$, kjer je $x = 45° = \frac{\pi}{4}$ in $h = 1° = \frac{\pi}{180}$.)

Nalogi. 1. Za funkcijo, definirano na zaprtem intervalu $[a, b]$, smiselno definirajte pojem *odvoda z desne* v točki a in *odvoda z leve* v točki b.

2. Pot delca po premici naj se s časom t spreminja kot $s = t^3 - t^2 + t$. Izračunajte povprečno hitrost delca med trenutkoma $t = 0$ in $t = 1$ ter njegovo trenutno hitrost v času $t = \frac{1}{2}$.

13. Funkcija in njen odvod

Iz slike je razvidno, da je tam, kjer zavzame odvedljiva funkcija f svoj maksimum ali pa minimu, tangenta na graf vodoravna, torej odvod enak 0. Skupno ime za minimum in maksimum je *ekstrem*. V mislih imamo *lokalne ekstreme*: Funkcija f ima v točki a lokalni ekstrem, če obstaja tak $\delta > 0$, da je bodisi $f(a) \leq f(x)$ za vse $x \in (a-\delta, a+\delta)$ (tedaj je v a *lokalni minimum*) bodisi $f(a) \geq f(x)$ za vse $x \in (a-\delta, a+\delta)$ (tedaj je v a lokalni maksimum).



Slika 21. V točkah, kjer je lokalni ekstrem, je tangenta vzporedna z abscisno osjo.

Velja torej naslednja lema:

Lema 13.1. *Če ima odvedljiva funkcija f v točki a lokalni ekstrem, je $f'(a) = 0$.*

Dokaz. Če je v a lokalni minimum, je za dovolj majhne $|h|$ izraz $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nenegativen za pozitivne h in nepozitiven za negativne h (saj je števec nenegativen), zato je edina mogoča limita, ko gre h proti 0, enaka 0. Podoben je dokaz v primeru, ko je v a lokalni maksimum. $\square$

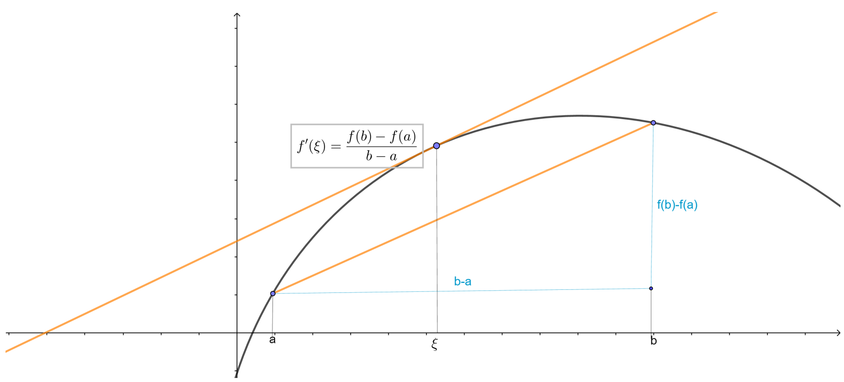
Izrek 13.2. *(Rollejev izrek) Naj bo $a < b$ in $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki naj bo odvedljiva na odprtem intervalu (a, b). Če je $f(b) = f(a)$, potem obstaja taka točka $\xi \in (a, b)$, da je $f'(\xi) = 0$.*

Dokaz. Ker je f zvezna, obstajata taki točki $x_m, x_M \in [a, b]$, da je

$$f(x_m) = m := \min_{a \le x \le b} f(x) \quad \text{in} \quad f(x_M) = M := \max_{a \le x \le b} f(x).$$

Če je katera od točk x_m, x_M vsebovana v odprtem intervalu (a, b), je po prejšnji lemi tam odvod funkcije f enak 0, in tedaj lahko vzamemo $\xi = x_m$ ali pa $\xi = x_M$. Preostane še možnost, da sta obe točki x_m in x_M v krajiščih a, b intervala. Ker je po predpostavki $f(a) = f(b)$, je tedaj $M = m$, kar pomeni, da je funkcija f konstantna. Tedaj je njen odvod identično enak 0 in za ξ lahko vzamemo katerokoli točko intervala (a, b). $\square$

Če v Rollejevem izreku opustimo predpostavko, da je $f(b) = f(a)$, zaključek izreka ne velja več. Pač pa se zdi, ko opazujemo tangento v različnih točkah grafa, da je v neki točki vzporedna sekanti skozi krajišči grafa. To trdi Lagrangeov izrek:



Slika 22. Tangenta je vzporedna sekanti skozi krajišči grafa.

Izrek 13.3. *(Lagrangeov izrek) Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki naj bo odvedljiva na odprtem intervalu (a, b), kjer naj bo $a < b$. Obstaja taka točka $\xi \in (a, b)$, da je*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{13.1}$$

Dokaz. Izrek bomo reducirali na Rollejev izrek tako, da bomo obravnavali novo funkcijo

$$g(x) = f(x) - kx,$$

kjer bomo izbrali konstanto k tako, da bo funkcija g zadoščala pogoju Rollejevega izreka, tj. $g(b) = g(a)$. Veljati mora torej

$$f(b) - kb = f(a) - ka,$$

od koder sledi

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{13.2}$$

Po Rollejevem izreku obstaja tak $\xi \in (a, b)$, da je $g'(\xi) = 0$, se pravi $f'(\xi) - k = 0$. Od tod sledi $k = f'(\xi)$ in nato po (13.2) še (13.1). □

Lagrangov izrek smo izpeljali iz Rollejevega, a je Rollejev le poseben primer Lagrangeovega, saj je $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, če je $f(b) = f(a)$.

Posledica 13.4. *Edine funkcije na intervalu (a, b), ki imajo odvod identično enak 0, so konstante.*

Dokaz. Vzemimo poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala (a, b) in uporabimo Lagrangeov izrek na intervalu $[x_1, x_2]$: obstaja tak $\xi \in (x_1, x_2)$, da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0.$$

Od tod sledi, da je $f(x_2) = f(x_1)$. Ker velja to za vsaki dve točki intervala (a, b), je f na njem konstanta. □

Posledica 13.5. *Če je na kakem intervalu (a, b) odvod funkcije f nenegativen (pozitiven), je funkcija na tem intervalu naraščajoča (strogo naraščajoča). Če pa je odvod nepozitiven (negativen), je funkcija padajoča (strogo padajoča).*

Dokaz. Za poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala (a, b) uporabimo Lagrangeov izrek na intervalu $[x_1, x_2]$: obstaja tak $\xi \in (x_1, x_2)$, da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Če je odvod f' pozitiven na intervalu (a, b), je $f'(\xi) > 0$ in sledi, da je $f(x_2) > f(x_1)$, kar pomeni, da je funkcija f strogo naraščajoča. Podobno dokažemo tudi druge trditve posledice. □

Točke, v katerih je odvod enak 0, imenujemo *kritične* ali *stacionarne* točke funkcije. Lokalni ekstremi so med njimi, ni pa vsaka kritična točka lokalni ekstrem. Npr. za funkcijo $f(x) = x^3$ je 0 stacionarna točka, a ni lokalni ekstrem, saj je ta funkcija povsod strogo naraščajoča.

Če pa je kritična točka c funkcije f taka, da v njej odvod f' spremeni predznak, potem je v c lokalni ekstrem:

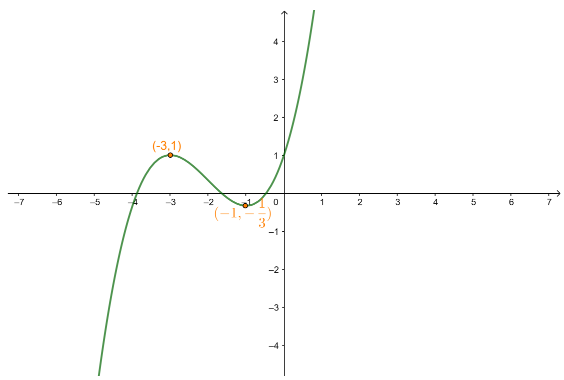
Trditev 13.6. *Predpostavimo, da je $f'(c) = 0$. Če je za kak $\delta > 0$ odvod f' negativen na intervalu $(c - \delta, c)$, na intervalu $(c, c + \delta)$ pa pozitiven, potem ima f v točki c lokalni minimum. Če pa je f' pozitiven na intervalu $(c - \delta, c)$, na intervalu $(c, c + \delta)$ pa negativen, potem ima f v c lokalni maksimum.*

Dokaz. Če je odvod f' negativen na intervalu $(c-\delta, c)$, je funkcija f na tem intervalu strogo padajoča. Če je še f' pozitiven na intervalu $(c, c+\delta)$, je funkcija f tam strogo naraščajoča. Kadar sta izpolnjena oba pogoja, ima torej v c lokalni minimum. Dokaz za lokalni maksimum je podoben. $\square$

Zgled 13.7. Določimo ekstreme funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$. Ničli odvoda

$$f'(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

sta -3 in -1. Za $x < -3$ je $f'(x) > 0$, za $x \in (-3, -1)$ pa je $f'(x) < 0$, zato je v -3 lokalni maksimum, ki znaša $f(-3) = 1$. Za $x > -1$ je $f'(x) > 0$ in, ker je nekoliko levo od -1 odvod negativen, je v v -1 lokalni minimum, ki znaša $f(-1) = -\frac{1}{3}$.



Slika 23. Graf polinoma $p(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

Naloge. 1. Določite ničle in ekstreme polinoma $p(x) = 2(x+1)(x-1)^2$ ter narišite njegov graf.

2. Dokažite s pomočjo Lagrangeovega izreka, da velja

$$|\sin\beta - \sin\alpha| \leq |\beta - \alpha$$

za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka funkcija, da je $|f'(x)| < 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Dokažite, da sta potem sliki $f(x)$ in $f(t)$ poljubnih dveh točk x in t med seboj manj oddaljeni, kot sta med seboj oddaljena originala x in t.

13.1. **L'Hospitalovo pravilo.** Imamo odvedljivi funkciji f in g, ki imata skupno ničlo a. Izračunati želimo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{13.3}$$

Z uporabo Lagrangeovega izreka za funkcijo f na intervalu $[a, x]$ lahko zapišemo

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) = f'(\xi)(x-a), \text{ kjer je } \xi \in (a, x).$$

Podobno je

$$g(x) = g'(\eta)(x-a), \text{ kjer je } \eta \in (a, x).$$

Ko gre x proti a, morata tudi ξ in η konvergirati proti a, saj sta vedno med a in x, zato sledi, da je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}, \tag{13.4}$$

če sta odvoda f' in g' zvezna v točki a. Če izraz $f(a)/g(a)$ ni nedoločen, smo s tem izračunali limito (13.3). Da se dokazati splošnejše *L'Hospitalovo pravilo*:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ki velja tudi v primeru, ko je izraz $f'(a)/g'(a)$ nedoločen (npr. $0/0$).

Naloga. Dokažite, da velja (13.4) tudi v primeru, ko gresta $f(x)$ in $g(x)$ oba proti ∞, ko gre x proti a. (Namig: $\frac{f}{g}=\frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}}$.)

Zgled 13.8. Za poljubni konstanti a in b imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-e^{ax}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{be^{bx}-ae^{ax}}{1}=b-a.$$

Naloga. Izračunajte:
(i) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$;
(ii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$.

13.2. **Odvod inverzne funkcije.** Predpostavimo, da je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, katere odvod na intervalu (a,b) je tudi zvezen in povsod različen od 0. Potem je odvod f' bodisi povsod pozitiven bodisi povsod negativen na (a,b). Če bi namreč bil v dveh točkah x_1,x_2 nasprotno predznačen, bi imel na intervalu (x_1,x_2) ničlo, predpostavili pa smo, da je povsod različen od 0. Privzemimo, da je f' povsod na (a,b) pozitiven (če je negativen, lahko namesto f obravnavamo $-f$). Potem je f strogo naraščajoča funkcija in preslika interval $[a,b]$ bijektivno na interval $[c,d]$, kjer je $c=f(a)$ in $d=f(b)$. Vemo že, da je inverzna funkcija $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ zvezna, sedaj pa bi radi dokazali, da je odvedljiva na intervalu (c,d).

Za poljuben $y\in(c,d)$ torej želimo ugotoviti, ali obstaja

$$\lim_{k\to 0}\frac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k}. \tag{13.5}$$

Označimo $x=f^{-1}(y)$ in $h=f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)$; potem je $y=f(x)$ in $y+k=f(x+h)$, torej $k=f(x+h)-y=f(x+h)-f(x)$. Ker je f^{-1} zvezna funkcija, gre h proti 0, ko gre k proti 0. Limito (13.5) lahko zato napišemo kot

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{f(x+h)-f(x)}=\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)^{-1}=\frac{1}{f'(x)}.$$

S tem spo pokazali, da je f^{-1} odvedljiva funkcija in velja

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

V navadi je tudi argument funkcije f^{-1} označiti kar z x, tako, da smo skoraj v celoti dokazali naslednji izrek:

Izrek 13.9. *Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ (kjer dopuščamo možnost, da je $a = -\infty$ ali $b = \infty$) funkcija z zveznim odvodom f', ki naj nima nobene ničle. Potem obstaja inverzna funkcija $f^{-1} : f(a, b) \to (a, b)$, ki ima tudi zvezen odvod, in sicer je*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{13.6}$$

Dokaz. Gornji razmislek lahko uporabimo na vsakem zaprtem intervalu $[A, B] \subseteq (a, b)$. Ker je f strogo monotona, je bijekcija na svojo zalogo vrednosti $f(a, b)$ in je zato inverzna funkcija f^{-1} definirana povsod na $f(a, b)$. $\square$

Zgled 13.10. Inverzna funkcija od funkcije $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ je $f^{-1}(x) = \log_a x$. Po formuli (13.6) je

$$\log_a' x = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

V posebej pomembnem primeru, ko je $a = e$, se ta formula glasi

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

Zgled 13.11. Odvod potence x^r, ko je $r \in \mathbb{N}$, že poznamo, sedaj pa lahko določimo odvod za splošen $r \in \mathbb{R}$. Funkcijo $f(x) = x^r$ namreč lahko izrazimo kot posredno funkcijo

$$x^r = (e^{\ln x})^r = e^{r \ln x} = e^{ru}, \quad \text{kjer je } u = \ln x.$$

Po pravilu za posredno odvajanje imamo

$$(x^r)' = re^{ru}u' = re^{r \ln x}\frac{1}{x} = rx^r\frac{1}{x} = rx^{r-1}.$$

13.3. **Ciklometrične funkcije.**

Zgled 13.12. (i) Funkcija $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ je naraščajoča bijekcija, njej inverzno funkcijo

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

imenujemo *arkus sinus*. Po formuli za odvod inverzne funkcije je

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2}}.$$

Ker je $\sin \arcsin x = x$, dobimo

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{13.7}$$

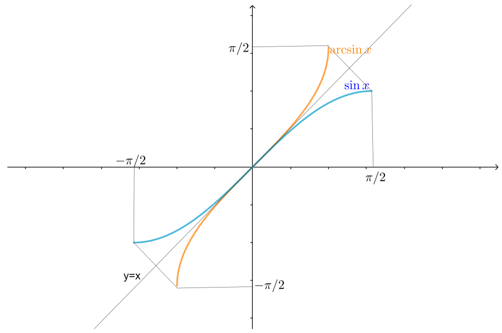
(ii) Funkcija $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ je padajoča bijekcija. Njej inverzna funkcija

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

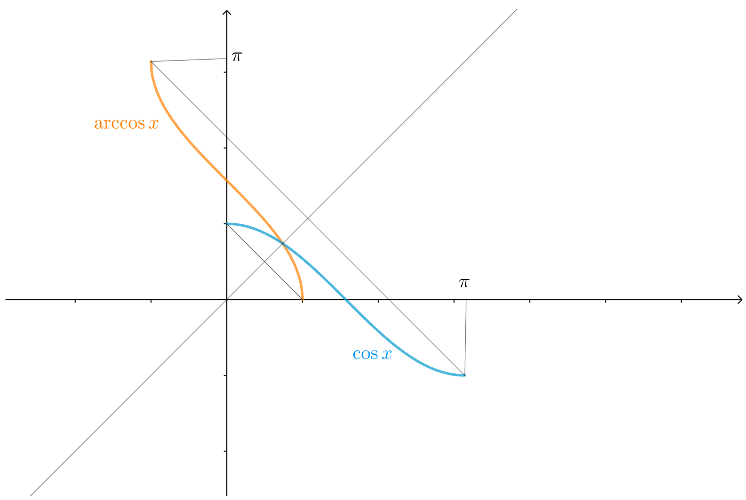
arkus kosinus ima odvod

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{13.8}$$

kar pove podoben razmislek kot zoraj pri arkus sinusu. Ko seštejemo formuli (13.7)



SLIKA 24. Grafa funkcij arkus sinus in sinus sta si simetrična glede na premico $y = x$.



SLIKA 25. Grafa funkcij arkus kosinus in kosinus sta si simetrična glede na premico $y = x$.

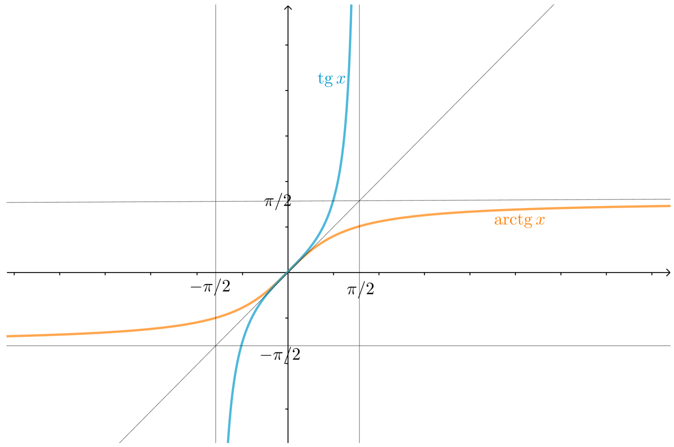
in (13.8), dobimo $[\arcsin x + \arccos x]' = 0$. To ni presenetljivo, saj je

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \tag{13.9}$$

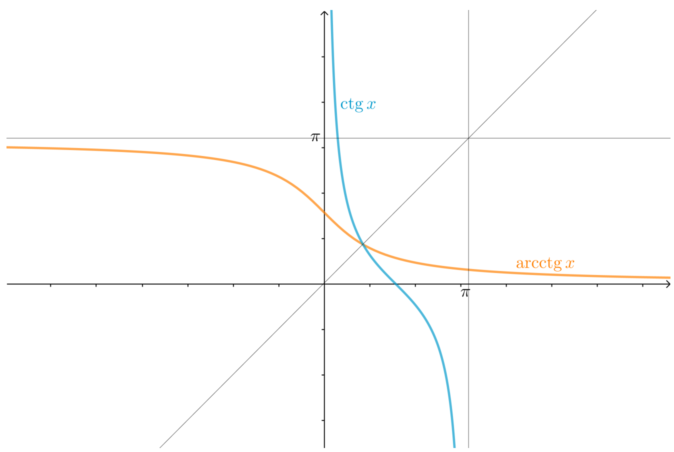
Če namreč označimo $\alpha = \arcsin x$ in $\beta = \arccos x$, je $x = \sin\alpha$ in $x = \cos\beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$. Ker je pri tem $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in $\beta \in [0, \pi]$ (torej $\frac{\pi}{2} - \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), sledi, da je $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, kar je nekoliko drugače zapisana identiteta (13.9).

(iii) Inverzna funkcija od $\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ je *arkus tangens*, $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Njen odvod je (spet bomo uporabili parvilo za odvod inverzne funkcije in dejstvo, da je $\mathrm{tg}\,' x = \frac{1}{\cos^2 x}$)

$$\mathrm{arctg}\,' x = \cos^2 \mathrm{arctg}\, x = \frac{1}{1 + (\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, x))^2}.$$



Slika 26. Grafa funkcij arkus tangens in tangens.



Slika 27. Grafa funkcij arkus kotangens in kotangens.

Torej

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

(iv) *Arkus kotangens*, inverzna funkcija kotangensa, $\operatorname{ctg} : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, preslika realno os $\mathbb{R}$ na interval $(0,\pi)$. Izračun njenega odvoda,

$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2},$$

pa bomo pustili za vajo.

14. Višji odvodi in konveksnost

Odvod f' funkcije f je funkcija. Če je odvedljiva, jo lahko odvajamo itd.

Definicija 14.1. *Drugi odvod* funkcije f je definiran kot

$$f'' = (f')'.$$

Tretji odvod je definiran kot

$$f^{(3)} = (f'')'.$$

Z indukcijo lahko definiramo

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dodatno definiramo $f^{(0)} = f$. Druga oznaka za n-ti odvod, kadar označimo $y = f(x)$, je $\frac{d^n y}{dx^n}$, torej

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}.$$

Zgled 14.2. (i) Za funkcijo $f(x) = \sin 2x$ je

$$f'(x) = 2\cos 2x,\ f''(x) = -2^2 \sin 2x,\ f^{(3)}(x) = -2^3 \cos 2x,\ f^{(4)}(x) = 2^4 \sin 2x, \ldots.$$

(ii) Za funkcijo $f(x) = \ln x$ pa je

$$f'(x) = \frac{1}{x},\ f'' = -\frac{1}{x^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3},\ f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \ldots.$$

V splošnem je $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Drugi odvod lahko pomaga pri določanju ekstremov.

Trditev 14.3. *Predpostavimo, da je f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija (se pravi, da je f'' zvezna funkcija) in da je $f'(a) = 0$. Če je $f''(a) > 0$, je v a lokalni minimum; če pa je $f''(a) < 0$, je v a lokalni maksimum funkcije f.*

Dokaz. Če je $f''(a) > 0$, je zaradi zveznosti $f''(x) > 0$ za vse x na kakem dovolj majhnem intervalu okrog a, zato je tam f' strogo naraščajoča funkcija. Ker je $f'(a) = 0$, mora biti potem $f'(x) < 0$ za $x < a$ in $f'(x) > 0$ za $x > a$ (obakrat gledamo le x na dovolj majhnem intervalu okrog a). Po trditvi 13.6 ima tedaj f v točki a lokalni minimum. Dokaz za lokalni maksimum je podoben. □

Zgled 14.4. Določimo ekstreme polinoma $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$. Prvi odvod je

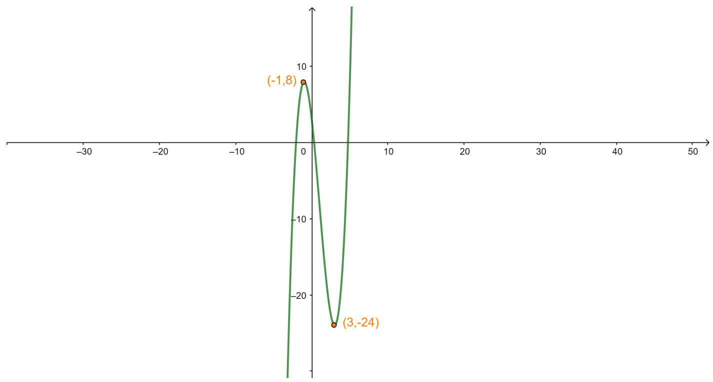
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1),$$

njegovi ničli sta -1 in 3. Drugi odvod je

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Ker je $f''(-1) = -12 < 0$, je v -1 lokalni maksimum, ki znaša $f(-1) = 8$. Ker je $f''(3) = 12 > 0$, je v 3 lokalni minimum, in sicer je $f(3) = -24$.

Ko gre x proti ∞, prevlada člen x^3 nad drugimi členi, zato gre $f(x)$ proti ∞. Podobno gre $f(x)$ proti $-\infty$, ko gre x proti $-\infty$. Grafa te funkcije ni težko narisati.



SLIKA 28. Graf polinoma $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$

Zgled 14.5. (*Princip najmanjših kvadratov*) Ko n-krat izmerimo neko količino, dobimo (zaradi napak pri merjenju) n rezultatov $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ki se nekoliko razlikujejo med seboj. Kaj je najbolj smiselno vzeti za vrednost količine?

Vrednost x bi radi določili tako, da bi se kar najbolj prilegala rezultatom vseh n meritev. Možen kriterij bi bil, da je vsota vseh odstopnanj, tj. $|x-a_1|+\ldots+|x-a_n|$, minimalna. Pri tem smo morali vzeti absolutno vrednost, saj moramo na enak način upoštevati odstopanja navzgor in navzdol. Ker pa funkcija $x \to |x|$ ni odvedljiva, bi bilo z vsoto vseh odstopanj nerodno računati, zato jo bomo raje nadomestili z

$$f(x) = (x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2.$$

Določiti torej želimo x tako, da bo ta funkcija f imela minimum. Iz pogoja

$$f'(x) = 2(x - a_1) + \ldots + 2(x - a_n) = 0$$

dobimi

$$x_m = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n),$$

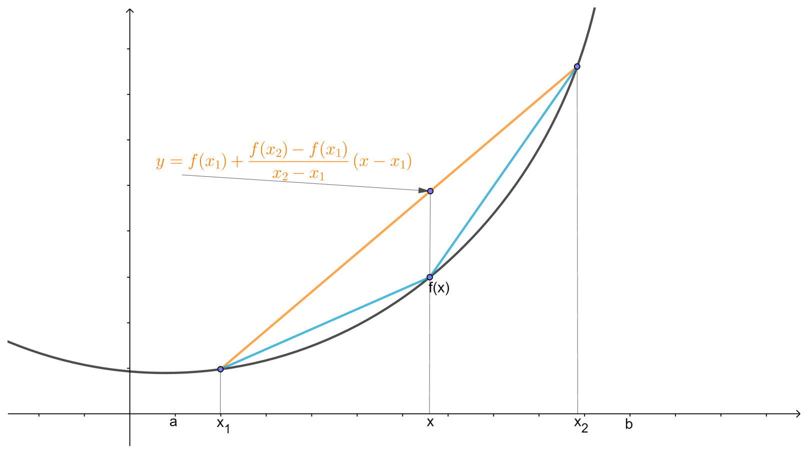
kar je povprečje vseh izmerjenih vrednosti $a_1, \ldots, a_n$. Ker je $f'' = 2n > 0$, je v točki x_m lokalni minimum funkcije f. Ta minimum je dejansko globalni, saj je f kvadratna funkcija, katere graf je navzgor obrnjena parabola, in ima najmanjšo vrednost v temenu.

14.1. **Konveksnost, konkavnost in prevoji.**

Definicija 14.6. Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je *konveksna*, če je za poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala (a, b) graf funkcije f na intervalu (x_1, x_2) pod sekanto skozi točki $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$. Iz enačbe premice skozi ti dve točki sledi, da lahko definicijo konveksnosti zapišemo kot

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{ če je } x_1 < x < x_2 \ \ (x_1, x_2 \in (a, b)). \tag{14.1}$$

Če velja pri tem v (14.1) stroga neenakost, pravimo, da je f *strogo konveksna*. Funkcija f je *konkavna*, če je $-f$ konveksna; drugače povedano, v (14.1) je treba pri definiciji konkavnosti znak $\leq$ spremeniti v $\geq$.



SLIKA 29. Konveksna funkcija

Pogoj konveksnosti (14.1) lahko napišemo kot

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ če je } x_1 < x < x_2. \tag{14.2}$$

To pomeni, da je sekanta skozi $(x_1, f(x_1))$ in $(x, f(x))$ manj strma kot sekanta skozi $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$. Iz slike vidimo, da je potem sekanta skozi $(x, f(x))$ in $(x_2, f(x_2))$ bolj strma od tiste skozi $(x_1, f(x_1))$ in $(x, f(x))$, torej

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ če je } x_1 < x < x_2. \tag{14.3}$$

Lema 14.7. *Pogoja (14.2) in (14.3) sta ekvivalentna.*

Dokaz. Pogoj (14.2) lahko zapišemo kot $f(x) \le f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2)$ oziroma

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ če je } x_1 < x < x_2. \tag{14.4}$$

Iz (14.2) in (14.4) pa očitno sledi (14.3).

Za dokaz v obratno smer, zapišemo (14.3) najprej kot $(x_2 - x_1)f(x) \le f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)$, kar lahko preoblikujemo v $(x_2 - x_1)f(x) \le f(x_1)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x - x_1) + f(x_2)(x - x_1)$, torej tudi v $f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, kar je ravno pogoj (14.1), za katerega že vemo, da je ekvivalenten z (14.2). $\square$

Če uporabimo neenakost (14.2) za $x < x_2 < x_3$ namesto $x_1 < x < x_2$, dobimo

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \le \frac{f(x_3) - f(x)}{x_3 - x},$$

kar pomeni, da diferenčni kvocienti

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

pri fiksnem x padajo (kot funkcije spremenljivke t). Iz ocene (14.3) (kamor vstavimo t namesto x_2) pa sledi, da so ti diferenčni kvocienti navzdol omejeni z $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$, torej mora obstajati

$$(D^+f)(x) := \lim_{t \to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

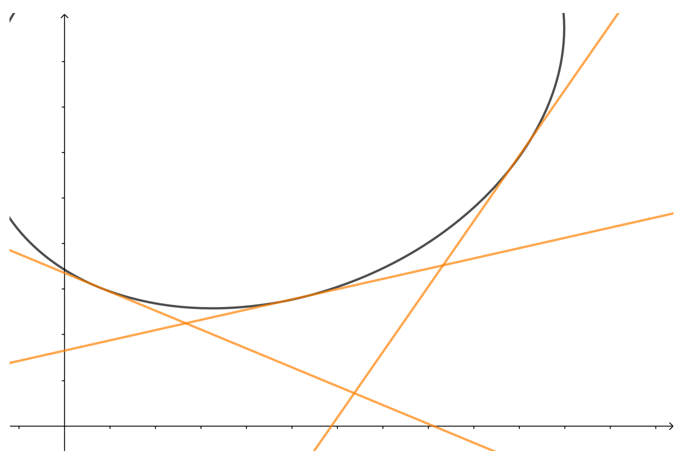
To pomeni, da je f odvedljiva z desne strani. Podoben argument pokaže, da je odvedljiva tudi z leve in sicer velja

$$(D^-f)(x) := \lim_{t \to x^-} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \leq (D^+f)(x),$$

kot sledi iz (14.3). Ker je f v točki x odvedljiva z leve in desne, je zvezna z leve in desne, torej zvezna. Tako smo dokazali naslednjo lemo:

Lema 14.8. *Vsaka konveksna funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je v vsaki točki $x \in (a,b)$ odvedljiva z leve in z desne strani ter zvezna.*

Kot pove primer funkcije $x \mapsto |x|$, pa konveksna funkcija ni nujno odvedljiva (čeprav je odvedljiva z leve in desne).



Slika 30. Konveksna funkcija je povsod nad svojimi tangentami

Označimo sedaj

$$M(x) := (D^+f)(x) = \inf_{t > x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Potem za $t > x$ velja

$$f(t) \geq M(x)(t-x) + f(x). \tag{14.5}$$

Kot smo že omenili, iz (14.3) sledi, da za $t < x$ velja $\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \leq M(x)$, od koder sledi, da neenakost (14.5) velja tudi za $t < x$. S tem smo v eno smer dokazali naslednjo trditev:

Trditev 14.9. *Funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *je konveksna natanko tedaj, ko za vsak* $x \in (a, b)$ *obstaja tak* $M(x) \in \mathbb{R}$, *da velja (14.5), kar pomeni, da je za vsak* $x \in (a, b)$ *graf funkcije* f *nad premico* $y(t) = M(x)(t - x) + f(x)$. *(Če je* f *odvedljiva v* x, *je* $M(x) = f'(x)$ *in ta premica je tedaj kar tangenta na graf v točki* x.*)*

Dokaz. Dokazati moramo le še, da iz pogoja (14.5) sledi konveksnost funkcije f, tj., da velja pogoj (14.1) za poljubne tri točke $x_1 < x < x_2$ iz intervala (a, b). Najprej bomo x izrazili kot *konveksno kombinacijo* točk x_1 in x_2, to je kot

$$x = sx_1 + (1 - s)x_2,$$

kjer je $s \in [0, 1]$. To velja za $s = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$; tedaj je $1 - s = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Pogoj konveksnosti (14.1) lahko sedaj napišemo kot

$$f(sx_1 + (1 - s)x_2) \leq sf(x_1) + (1 - s)f(x_2). \tag{14.6}$$

Označimo sedaj $M(x)$ kar z M (ker bo x fiksen) in napišimo pogoj (14.5) za $t = x_1$ in $t = x_2$:

$$f(x_1) \geq M(x_1 - x) + f(x), \quad f(x_2) \geq M(x_2 - x) + f(x).$$

Ko prvo od teh neenakosti pomnožimo z s, drugo pa z $1 - s$ in ju nato seštejemo, dobimo

$$sf(x_1) + (1 - s)f(x_2) \geq M(sx_1 + (1 - s)x_2) - Mx + f(x) = f(x),$$

kar je ravno pogoj (14.6) konveksnosti. □

Izrek 14.10. *Če je* $f''(x) \geq 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$, *je* f *na intervalu* (a, b) *konveksna; če velja pri tem stroga neenakost* $>$, *je* f *strogo konveksna. Če pa je* $f''(x) \leq 0$, *je* f *konkavna (strogo konkavna, kadar velja* $<$*).*

Dokaz. Omejili se bomo na konveksnost, saj so dokazi ostalih izjav podobni. Po trditvi (14.9) zadošča dokazati, da za poljubna $x \neq t$ iz intervala (a, b) velja

$$f(t) \geq f'(x)(t - x) + f(x). \tag{14.7}$$

Po Lagrangeovem izreku obstaja tak $\xi \in (x, t)$, da je

$$f(t) = f'(\xi)(t - x) + f(x).$$

Ker je $f'' \geq 0$, je f' naraščajoča funkcija, torej je $f'(\xi) \geq f'(x)$, kadar je $t > x$ (saj je tedaj $\xi > x$). Tedaj je $f(t) = f'(\xi)(t - x) + f(x) \geq f'(x)(t - x) + f(x)$. Za $t < x$ pa je $f'(\xi) \leq f'(x)$, vendar je tedaj $t - x < 0$, zato velja neenakost (14.7) tudi v tem primeru. □

Definicija 14.11. Če obstaja kak tak $\delta > 0$, da je na intervalu $(c - \delta, c)$ funkcija f strogo konveksna, na intervalu $(c, c + \delta)$ pa strogo konkavna, ali pa obratno, pravimo, da je v točki c *prevoj* funkcije f.

Trditev 14.12. *Če je v točki* c *prevoj dvakrat zvezno odvedljive funkcije* f, *je* $f''(c) = 0$.

Dokaz. Predpostavimo, da je $f'' \neq 0$, npr. $f'' > 0$. Zaradi zveznosti obstaja potem tak $\delta > 0$, da je na intervalu $(c-\delta, c+\delta)$ funkcija pozitivna. Po prejšnji trditvi je zato tedaj f na celotnem intervalu $(c-\delta, c+\delta)$ strogo konveksna, kar nasprotuje dejstvu, da je v c prevoj. $\square$

Zgled 14.13. (i) Eksponentna funkcija $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) je strogo konveksna, saj je $f''(x) = a^x(\ln a)^2 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

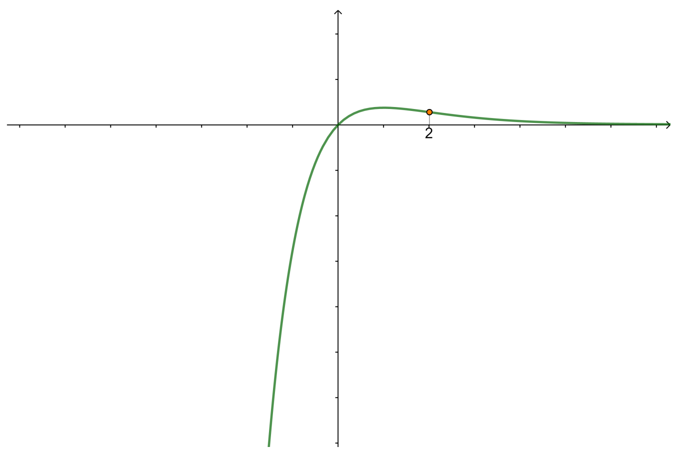
(ii) Če je $a > 0$, je funkcija $f(x) = log_a x$ konkavna, sa je $f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a} < 0$ za vse $x \in (0, \infty)$.

(iii) Poiščimo prevoje funkcije $f(x) = xe^{-x}$.

Prvi odvod je $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, drugi odvod pa

$$f''(x) = (x-2)e^{-x}.$$

Edina ničla drugega odvoda je 2. Ker v točki 2 f'' spremeni predznak, je tam res prevoj.



Slika 31. Graf funkcije $f(x) = xe^{-x}$

Naloge. 1. Določite ekstreme in prevoje ter območja konveksnosti in konkavnosti za funkcijo $f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}$, kjer je a konstanta. Nato narišite še njen graf.

2. Dokažite, da sta odvod z leve in odvod z desne konveksne funkcije naraščajoči funkciji.

3. Ali je vsaka konveksna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna?

15. Hiperbolične in njim inverzne funkcije

Definicija 15.1. Funkcije *hiperbolični sinus, kosinus, tangens in kotangens* so definirane takole:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

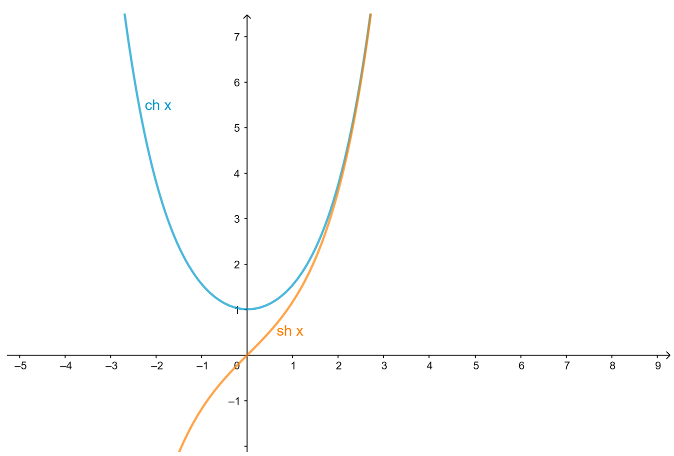
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Zakaj imajo te funkcije imena, ki spominjajo na trigonometrijo? Zato, ker imajo v hiperbolični geometriji podobno vlogo kot navadne trigonometrijske funkcije v evklidki geometriji, vendar tega tukaj ne bomo podrobneje pojasnevali. Očitne pa bodo nekatere podobnosti z lastnostmi navadnih trigonometrijskih funkcij. Npr.

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x, \quad \text{in} \quad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x.$$

Ker je $\operatorname{ch} x$ očitno vedno pozitivna funkcija, to pove, da je sh strogo naraščajoča funkcija. Nadalje je 0 edina ničla funkcije sh, torej rešitev enačbe $e^x = e^{-x}$, se pravi enačbe $e^{2x} = 1$. Zato je edini možni ekstrem funkcije ch v 0. Ker je $\operatorname{ch}'' x = \operatorname{ch} x > 0$ za vsak x, je v 0 minimum funkcije ch in funkcija ch je povsod konveksna. Ko gre x proti $\pm\infty$, gresta tako $\operatorname{ch} x$ kot $\operatorname{sh} x$ proti ∞. Podobno kot navaden, je tudi hiperbolični kosinus soda funkcija, tj. $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$. Hiperbolični sinus pa je liha funkcija, tj. $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$. Na podlagi vseh teh podatkov ni težko skicirati njuna grafa.



Slika 32. Grafa hiperboličnih sinusa in kosinusa

Vemo, da je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Kaj pa je $\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$? Imamo

$$\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} + \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}.$$

Torej velja

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x,$$

kar je analogija znane trigonometrijske formule $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Izračunajmo še

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{4}{4}.$$

Torej je

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

kar je analogija trigonometrijske formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

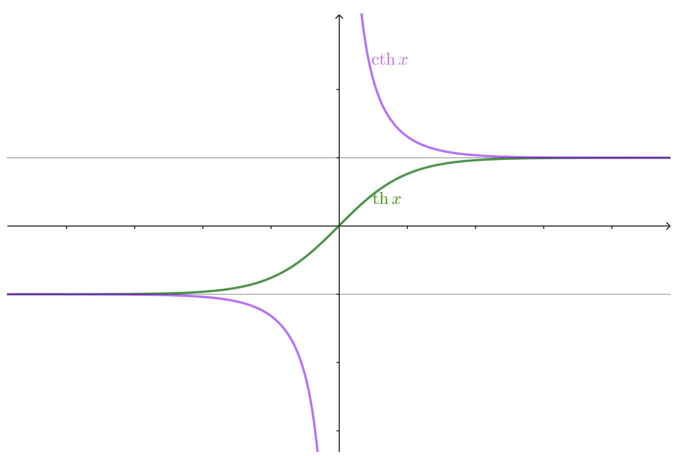
Za funkcijo th opazimo, da je liha in da velja

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}} = 1,$$

torej ima vodoravno asimptoti $y = 1$ in (ker je liha) $y = -1$. Nadalje je th strogo naraščajoča funkcija, saj je njen odvod

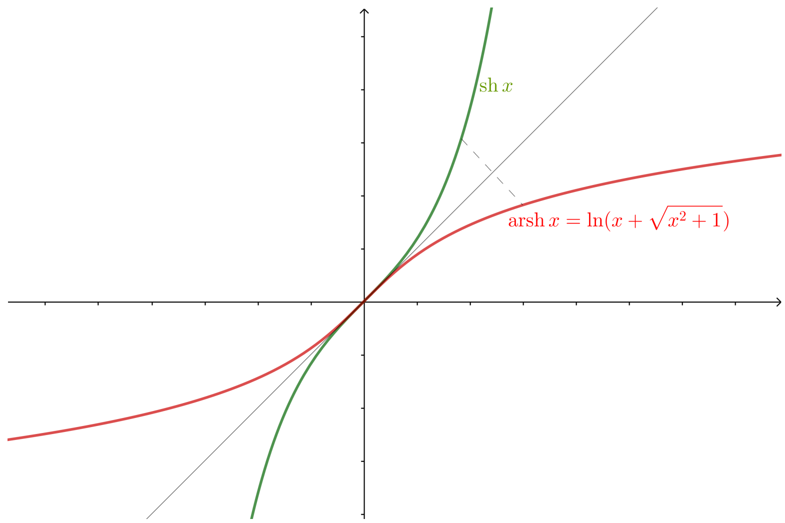
$$\operatorname{th}' x = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

vedno pozitiven. V točki 0 ima (kot vsaka liha funkcija) vrednost 0. Sedaj že lahko narišemo njen graf in na njegovi podlagi tudi graf funkcije $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$.



Slika 33. Graf hiperboličnega tangensa in hiperboličnega kotangensa

Funkciji sh in th sta strogo naraščajoči, zato bomo poiskali njuni inverzni funkciji. Inverzno funkcijo hiperboličnega sinusa imenujemo *hiperbolični arkus sinus* in označimo z arsh. Ker je sh na celi realni osi definirana funkcija in zavzame vse realne vrednosti, velja isto za njej inverno funkcijo arsh. Graf funkcije arsh je kar zrcalna slika grafa funkcije sh prek premice $y = x$. Funkcija sh se izraža z eksponentno funkcijo, zato lahko pričakujemo, da se da njena inverzna funkcija arsh



Slika 34. Grafa hiperboličnega sinusa in hiperboličnega arkus sinusa

izraziti s pomočjo logaritma. V ta namen moramo iz zveze $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ izraziti x. Označimo $u = e^x$, tako da je $\frac{u - u^{-1}}{2} = y$ oziroma

$$u^2 - 2yu - 1 = 0.$$

To je kvadratna enačba za u, katere rešitvi sta $u_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Ker je $u = e^x > 0$, pride v poštev le rešitev $u = y + \sqrt{y^2+1}$, od koder potem dobimo $x = \ln u = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Torej je $\operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$, se pravi

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

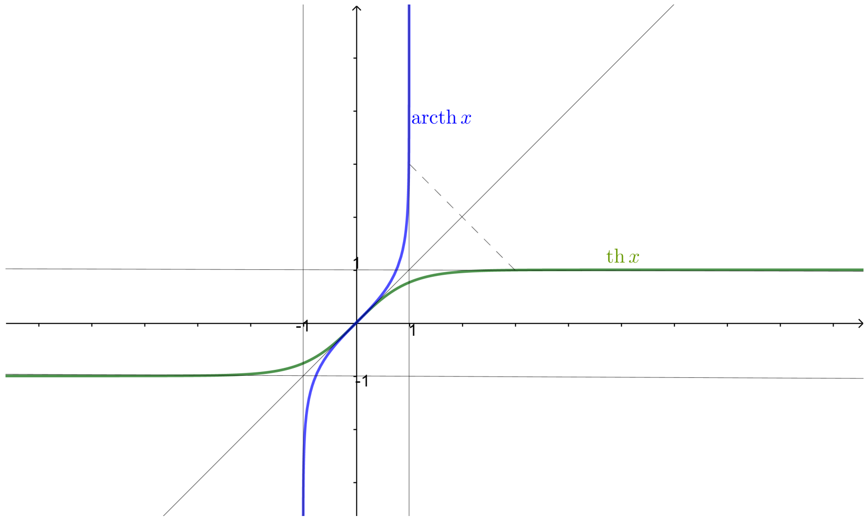
Od tod takoj sledi zelo pomembna formula za odvod funkcije arsh :

$$\operatorname{arsh}' x = (\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ta formula je zelo podobna že znani formuli za odvod navadnega arkus sinusa, namreč $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Inverzno funkcijo hiperboličnega tangensa imenujemo *hiperbolični arkus tangens* in označimo z arcth . Ker je zaloga vrednosti funkcije th interval $(-1, 1)$, je funkcija arcth definirana le na tem intervalu. Na podoben način, kot smo s pomočjo logaritma izrazili funkcijo arsh , lahko sedaj izrazimo arcth . Po kratkem računu, ki ga bomo pustili za vajo, dobimo

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$



Slika 35. Grafa hiperboličnega tangensa in hiperboličnega arkus tangensa

16. Taylorjeva vrsta

Najenostavnejše funkcije se zdijo polinomi. Zanima nas, katere funkcije se dajo izraziti v obliki "posplošenih polinomov", tj. neskončnih vrst

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{16.1}$$

kjer so *koeficienti* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ fiksni (za dano funkcijo f) in je f definirana le za tiste x, za katere vrsta (16.1) konvergira. Najpreprostejši zgled za to je geometrijska vrsta $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, ki predstavlja funkcijo $\frac{1}{1-x}$, vendar le na intervalu $(-1, 1)$, kjer geometrijska vrsta konvergira.

Kaj morajo biti za dano funkcijo f koeficienti a_n v vrsti (16.1), da bo veljala enakost (16.1)? Očitno mora biti

$$a_0 = f(0).$$

Za izračun koeficienta a_1 pa odvajajmo formulo (16.1), da dobimo $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$, in nato vstavimo $x = 0$. Na ta način dobimo

$$a_1 = f'(0).$$

Seveda je ta postopek nekoliko vprašljiv, saj ne vemo, če smemo vrsto (16.1) odvajati kar po členih. (Pravilo, da je odvod vsote funkcij enak vsoti odvodov, smo namreč doslej pokazali le za vsote končno mnogo funkcij.) Vendar bomo o tem premišljevali kasneje, v tem trenutku smo osredotočeni le na cilj, kako izračunati vse koeficiente a_n. Pri tem bomo privzeli, da je funkcija f neskončnokrat odvedljiva. Če formulo (16.1) n-krat odvajamo, dobimo

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)n \cdots 2x + (n+2)(n+1) \cdots 3x^2 + \ldots.$$

Ko vstavimo v to formulo $x = 0$, sledi

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{16.2}$$

Odločilno vprašanje sedaj je, ali pri tako določenih koeficientih vrsta (16.1) konvergira proti $f(x)$? Drugače rečeno, *ali gre razlika*

$$R_n(x) := f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{16.3}$$

proti 0*, ko gre n proti* ∞*?*

Za obravnavo tega vprašanja si oglejmo, pri fiksnem $x \neq 0$, funkcijo

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Njena vrednost v točki 0 je $F(0) = R_n(x)$, kjer je $R_n(x)$ določen z (16.3). Njena vrednost v točki x pa je $F(x) = 0$. Po Lagrangeovem izreku obstaja tak $\xi_n \in (0, x)$, da je $F'(\xi_n) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = -\frac{R_n(x)}{x}$, torej je

$$R_n(x) = -xF'(\xi_n). \tag{16.4}$$

Izračunajmo sedaj $F'(t)$:

$$\begin{aligned} F'(t) = -f'(t) + \left(\frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) + \left(\frac{2}{2!}f''(t)(x-t) - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\right) + \ldots \\ + \left(\frac{n-1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right) \\ + \left(\frac{n}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right). \end{aligned}$$

V tej vsoti se drugi člen vsakega oklepaja uniči s prvim členom naslednjega oklepaja, tako da ostane

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Od tod in iz (16.4) dobimo sedaj

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{n!}(x-\xi_n)^n x.$$

Ker je $\xi_n \in (0, x)$, lahko izrazimo $\xi_n = \theta_n x$ za kak $\theta_n \in (0, 1)$ in potem je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{n!}(1-\theta_n)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta_n < 1. \tag{16.5}$$

S tem smo dokazali naslednji izrek:

Izrek 16.1. *Naj bo f vsaj $(n+1)$-krat odvedljiva funkcija na kakem odprtem intervalu I okrog* 0*. Za vsak $x \in I$ velja naslednja Taylorjeva formula:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \tag{16.6}$$

kjer je ostanek $R_n(x)$ podan z (16.5). Kadar je

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

je torej vrednost $f(x)$ podana s potenčno vrsto

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \tag{16.7}$$

Opomba 16.2. (i) Včasih je potrebno uporabiti nekoliko splošnejšo Taylorjevo formulo, kjer funkcijo razvijemo po potencah od $x-\alpha$ za kako konstanto α (namesto zgolj $\alpha = 0$). Ta formula se glasi:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + R_n(x),$$

kjer je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha + \theta_n(x-\alpha))}{n!}(1-\theta_n)^n(x-\alpha)^{n+1}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Ta formula sledi takoj iz (16.6) z vpeljavo nove spremenljivke $X = x - \alpha$. Za vsak n je funkcija

$$T_n(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

polinom, imenovan *Taylorjev polinom*.

(ii) Ostanek $R_n(x)$, podan s formulo (16.5), imenujemo *Cauchyeva oblika ostanka*. Nekoliko enostavnejša je *Lagrangeova oblika ostanka*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \xi_n < x, \tag{16.8}$$

ki pa ne zadošča za obravnavo vseh elementarnih funkcij, kot so $\ln(1+x)$ in $(1+x)^r$. V naslednji nalogi bomo nakazali, kako hitro izpeljati Lagrangeovo obliko ostanka.

Naloga. Pri fiksnih $x \neq 0$ in n naj bo k taka konstanta, da ima funkcija

$$G(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{k}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

v točki $t = 0$ vrednost 0, tako da je potem $G(0) = 0 = G(x)$. Po Rollejevem izreku obstaja tak $\xi_n \in (0, x)$, da je $G'(\xi_n) = 0$. Pokažite, da od tod sledi $k = f^{(n+1)}(\xi_n)$ in sklepajte, da velja Taylorjeva formula (16.6) z ostankom Lagrangeove oblike.

16.1. **Vrsta za e^x.** Za vsak n je $(e^x)^{(n)} = e^x$, zato se Taylorjeva formula (16.6) glasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \tag{16.9}$$

kjer se ostanek $R_n(x)$, podan s (16.5), v tem konkretnem primeru glasi

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta_n x}}{n!}(1-\theta_n)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta_n < 1. \tag{16.10}$$

Ta ostanek lahko ocenimo kot

(16.11)

$$|R_n(x)| \le \frac{e^{|x|}}{n!}|x|^{n+1} = |x|e^{|x|}\frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{k-1}\frac{|x|}{k}\cdots\frac{|x|}{n} = C(|x|)\frac{|x|}{k}\cdots\frac{|x|}{n},$$

kjer smo s $C(|x|)$ označili produkt začetnih $k+1$ faktorjev. Naj bo k tak, da je $k-1 \leq |x| < k$. Potem so vsi faktorji $\frac{|x|}{k}$, $\frac{|x|}{k+1}$,..., $\frac{|x|}{n-1}$ pod 1, zato iz (16.11) sledi

$$|R_n(x)| \leq C(|x|)\frac{|x|}{n},$$

kar gre očitno proti 0, ko gre n proti ∞. Tako smo izpeljali Taylorjevo vrsto za e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \tag{16.12}$$

Kot poseben primer imamo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots. \tag{16.13}$$

Zgled 16.3. Koliko členov moramo vzeti v vrsti (16.13), da izračunamo e npr. na štiri decimalke natančno? Nekoliko natančneje lahko zastavimo to vprašanje tudi takole: Kako velik mora biti n, da bo $|R_n(1)| < 10^{-5}$?.

Po (16.11) je $|R_n(1)| \leq \frac{e^1}{n!} < \frac{3}{n!}$. Če torej izberemo n, tako, da bo $\frac{3}{n!} < 10^{-5}$, bomo imeli zahtevano natančnost. Torej $n! > 3 \cdot 10^5$, kar je izpolnjeno za $n \geq 9$. (Če bi uporabili Lagrangeovo obliko ostanka, bi ugotovili, da zadošča že $n \geq 8$.)

16.2. **Vrsti za sinus in kosinus.** Odvodi funkcije sin so sin, cos, $-\sin$, $-\cos$, sin,...(kar lahko napišemo s skupno formulo $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$). Njihove vrednosti v točki 0 so $0, 1, 0, -1, 0, -1, \ldots$, zato se Taylorjeva formula (16.6) v tem primeru glasi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+2}(x), \tag{16.14}$$

kjer smo vzeli za n liho število, $n = 2k+1$, in upoštevali, da je naslednji člen v vrsti enak 0, tako da smo lahko zapisali ostanek $R_{2k+2}(x)$, namesto $R_{2k+1}(x)$. Ker je $|\sin^{(n+1)} x|$ bodisi $|\pm \sin x|$ bodisi $|\pm \cos x|$ za vse x, kar je oboje pod 1, lahko po (16.5) ostanek $R_n(x)$ ocenimo kot

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} = |x|\frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{k-1}\frac{|x|}{k}\cdots\frac{|x|}{n}. \tag{16.15}$$

Kot v primeru eksponentne funkcije naj bo sedaj k tak, da je $k-1 \leq x < k$; potem sledi, da je

$$|R_n(x)| \leq C(|x|)\frac{|x|}{n},$$

kar gre očitno proti 0, ko gre x proti ∞. Zato velja

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots. \tag{16.16}$$

Podobno izpeljemo, da je

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots. \tag{16.17}$$

Zgled 16.4. Fiziki pogosto uporabljajo približek $\sin x \approx x$ za majhne kote x. Za katere x je $|\sin x - x| < 10^{-3}$?

Vprašanje je torej, za katere x je razvoj $x + \frac{0}{2!}x^2$ dovolj dober približek za $\sin x$ oziroma, natančneje: za katere x je $|R_2(x)| < 10^{-3}$. Po oceni (16.15) je ta pogoj izpolnjen, če je $\frac{|x|^{2+1}}{2!} < 10^{-3}$. Če bi uporabili Lagrangeovo obliko ostanka, bi tudi tukaj dobili boljšo oceno, namreč $\frac{|x|^3}{3!} < 10^{-3}$, kar rezultira v $|x| < 0.1817... \approx 10°$.

Konvergenco vrst je mogoče obravnavati, na enak način kot za realna, tudi za kompleksna števila. Če vstavimo ix (namesto x) v vrsto (16.12) za e^x, dobimo

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots]. \end{aligned}$$

Ko to primerjamo z vrstama (16.16) in (16.17) za sinus in kosinus, spoznamo, da velja naslednja *Eulerjeva formula*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{16.18}$$

Ko vsatvimo v to formulo $-x$ namesto x, dobimo

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Ko to formulo kombiniramo s prejšnjo, dobimo naslednji Eulerjevi formuli:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{in} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{16.19}$$

Ti dve formuli spominjata na definicijo funkcij ch in sh; iz njiju sledi, da je $\cos x = \mathrm{ch}\,(ix)$ in $\sin x = -i\mathrm{sh}\,(ix)$. Sedaj lahko definiramo eksponentno funkcijo tudi v kompleksnem in sicer

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos x + i \sin x) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Naloge. 1. Izračunajte $e^{1+3\frac{\pi}{2}i}$.
2. Iz vrste za e^x izpeljite vrsti za $\mathrm{sh}\, x$ in $\mathrm{ch}\, x$.
3. Izračunajte prve tri člene vrste za $\mathrm{tg}\, x$.

16.3. **Vrsta za** $\ln(1 + x)$**.** Funkcija ln v točki 0 ni definirana, zato ne moremo obravnavati njene Taylorjeve formule okrog 0, temveč bomo raje obravnavali funkcijo $f(x) = \ln(1 + x)$. Njeni odvodi so

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

njihove vrednosti v 0 so $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Taylorjeva formula (16.6) se zato tukaj glasi

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \dots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n + R_n(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x), \end{aligned}$$

kjer je po (16.5)

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{n!(1+\theta_n x)^{n+1}}(1-\theta_n)^n x^{n+1}, \quad (0 < \theta_n < 1),$$

torej

$$|R_n(x)| = \frac{|x|}{|1+\theta_n x|}\left(\frac{(1-\theta_n)}{|1+\theta_n x|}\right)^n |x|^n, \quad (0 < \theta_n < 1). \tag{16.20}$$

Kadar je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, lahko napišemo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots. \tag{16.21}$$

Kvocientni kriterij pokaže, da vrsta v (16.21) konvergira absolutno za $x \in (-1,1)$, za $|x| > 1$ pa divergira. Za $x = -1$ je vrsta v (16.21) harmonična, torej divergentna. Za $x = 1$ pa je alternirajoča in konvergentna. Zato je smiselno ocenjevati ostanek le za $x \in (-1,1]$, saj sicer vrsta ne konvergira nikamor, kaj šele proti $\ln(1+x)$. Če je $x \in (-1,1)$, lahko ostanek (16.20) ocenimo navzgor kot

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{1-|x|}|x|^n,$$

saj je tedaj $1-\theta_n < 1+\theta_n x$. Ker gre $|x^n|$ proti 0, ko gre n proti ∞, velja enako za $R_n(x)$. Za $x = 1$ pa iz (16.20) ne moremo z gotovostjo sklepati, da gre ostanek proti 0, pač pa si tedaj pomagamo z Lagrangeovo obliko ostanka (16.8):

$$R_n(1) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+\xi_n)^{n+1}} 1^{n+1}, \quad \xi_n \in (0,1).$$

Od tod sledi

$$|R_n(1)| < \frac{1}{n+1}.$$

S tem smo dokazali, da velja razvoj (16.21) za vse $x \in (-1,1]$.

S pomočjo vrste (16.21) lahko računalnik izračuna naravne logaritme vseh števil iz intervala $(0,2]$, saj lahko vsako tako število izrazimo kot $1+x$, kjer je $x \in (-1,1]$. Kako pa izračuna $\ln b$, če je $b > 2$? Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$, je za dovolj velik n število $\sqrt[n]{b}$ v intervalu $(0,2]$, zato pozna $c := \ln \sqrt[n]{b}$; nato lahko izračuna $\ln b$ kot $\ln b = \ln(\sqrt[n]{b})^n = nc$.

Naloga. Razvijte v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 funkcijo $f(x) = \ln\frac{2-x}{4+2x}$. Kje vrsta konvergira?

16.4. **Binomska vrsta.** Poiskati želimo Taylorjevo vrsto za funkcijo $f(x) = (1+x)^r$, kjer je $r \in \mathbb{R}$. Odvodi te funkcije so

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n} \quad (n = 0,1,2,\ldots),$$

zato je njena Taylorjeva vrsta (16.7)

$$1 + \frac{r}{1!}x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \ldots.$$

S kvocientnim kriterijem ugotovimo, da ta vrsta absolutno konvergira, če je $|x| < 1$, za $|x| > 1$ pa divergira. Vendar pa to še ne zagotavlja, da za $|x| < 1$ konvergira ravno proti $(1+x)^r$. Da bi to pokazali, moramo dokazati, da gre ostanek $R_n(x)$ proti 0, ko gre n proti ∞. Uporabili bomo Cauchyevo obliko (16.5) ostanka, ki se v tem primeru glasi

$$R_n(x) = \frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{n!}(1+\theta_n x)^{r-n-1}(1-\theta_n)^n x^{n+1} \ \ 0 < \theta_n < 1.$$

Od tod je

$$|R_n(x)| = |r||r-1||\frac{r}{2}-1|\cdots|\frac{r}{n}-1||1+\theta_n x|^{r-1}\left(\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x}\right)^n |x|^{n+1}.$$

Za $x \in (-1,1)$ je $|1+\theta_n x| < 2$ in $\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x} < 1$, zato

$$|R_n(x)| < |r||1-r||1-\frac{r}{2}|\cdots|1-\frac{r}{n}||x|^{n+1}.$$

Naj bo $k \in \mathbb{N}$ tako velik, da je $0 \le 1 - \frac{r}{k} < 1$. Potem lahko $R_n(x)$ še nadalje ocenimo kot

$$|R_n(x)| < |r||1-r|\cdots|1-\frac{k-1}{r}||x|^{n+1},$$

kar gre proti 0, ko gre n proti ∞. S tem smo dokazali, da za $x \in (-1,1)$ velja (16.22)

$$(1+x)^r = 1 + \frac{r}{1!}x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \ldots.$$

Zaradi lažjega zapisa vrste v (16.22) vpeljimo *binomski simbol*

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

Potem se (16.22) glasi

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Kadar je $r \in \mathbb{N}$, zgoraj vpeljani binomski simbol sovpada s tistim, ki ga poznate iz srednje šole, saj je

$$\frac{r!}{(r-n)!n!} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)(r-n)\cdots 2\cdot 1}{((r-n)\cdots 2\cdot 1)n!} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1}{n!}.$$

Nadalje tedaj za vse $n > r$ binomski simbol $\binom{r}{n}$ vsebuje faktor $(r-r)$ in je zato enak 0. Tedaj je vrsta v (16.22) končna, reducira se na znano formulo za potenco binoma oblike $(1+x)^r$ $(r \in \mathbb{N})$.

Splošni binom $(a+b)^r$ tudi lahko ravijemo v vrsto, kadar je $|a| \neq |b|$. Če je npr. $|b| < |a|$, lahko zapišemo

$$(a+b)^r = a^r(1+x)^r, \quad \text{kjer je } x = \frac{b}{a},$$

in nato razvijemo $(1+x)^r$ v vrsto.

Opomba 16.5. Opazimo, da je $\binom{r}{0} = 1$ in $\binom{r}{1} = r$ za vsak $r \in \mathbb{R}$.

Zgled 16.6. Razvijmo v binomsko vrsto $\sqrt{1+x}$.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots.$$

Naloge. 1. Razvijte v binomsko vrsto $(1+x)^{-1}$ in spoznajte, da se ta razvoj ujema z geometrijsko vrsto.

2. Razvijte v Taylorjevo vrsto funkcijo $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Kje natančno ta vrsta konvergira?

3. Razvijte v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 funkcijo

$$\frac{2x+3}{(x-1)(2-x)}.$$

(Navodilo: Najprej poskusite funkcijo napisati v obliki $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{2-x}$, kjer je treba določiti konstanti A in B. Nato $\frac{1}{2-x}$ izrazite kot $\frac{1}{2}(1-\frac{x}{2})^{-1}$).)

16.5. **Določanje ekstremov s pomočjo višjih odvodov.** Predpostavimo, da je funkcija f vsaj m-krat zvezno odvedljiva in da je $f'(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0$ ter $f^{(m)}(a) \neq 0$. Ali ima tedaj f v točki a ekstrem?

Ker je po predpostavki $f^{(m)}$ zvezna funkcija, je na kakem dovolj majhnem intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ $(\delta > 0)$ povsod istega predznaka kot v točki a. Če je npr. $f^{(m)}(a) > 0$, je $f^{(m)}(x) > 0$ za vse $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Po Taylorjevi formuli (z Lagrangeovo obliko ostanka) je

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-a)^m, \quad (\xi \in (a,x)). \tag{16.23}$$

Če je m liho število, je $(x-a)^m > 0$, v ce je $x > a$; in $(x-a)^m < 0$, če je $x < a$. Zato tedaj izraz $\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-a)^m$ pri prehodu skozi točko a spremeni predznak (tj., levo od a je pozitiven, desno negativen, ali pa obratno). Iz enakosti (16.23) sledi, da velja isto za $f(x)-f(a)$, zato tedaj funkcija f v točki a nima ekstrema. Če pa je m sodo število, je $(x-a)^m \geq 0$, zato je po (16.23) $f(x)-f(a)$ enakega predznaka kot $f^{(m)}(\xi)$, ki je enakega predznaka kot $f^{(m)}(a)$. Torej, če je $f^{(m)}(a) > 0$, je tudi $f(x)-f(a) > 0$ za vse $x \in (a-\delta, a+\delta)$, zato ima tedaj f v točki a lokalni minimum. Tako smo dokazali:

Izrek 16.7. *Če je $f^{(m)}$ zvezna funkcija in a taka točka, da je*

$$f'(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \textit{in} \quad f^{(m)}(a) \neq 0,$$

potem ima f v točki a lokalni ekstrem natanko tedaj, ko je m sodo število. V tem primeru je v a lokalni minimum za f, kadar je $f^{(m)}(a) > 0$; lokalni maksimum pa, kadar je $f^{(m)}(a) < 0$.

16.6. **L'Hospitalovo pravilo. Naloga.** Bodita f in g taki funkciji, da je $f(a) = f'(a) = \ldots f^{(m-1)}(a) = 0$, $g(a) = g'(a) = \ldots g^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m)}(a) \neq 0$ in $g^{(m)}(a) \neq 0$. Dokažite, da je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(m)}(a)}{g^{(m)}(a)}.$$

17. Riemannov integral

Kako bi določili ploščino ravninskega lika, omejenega z grafom nenegativne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, abscisno osjo in premicama $x = a$, $x = b$?

Interval $[a, b]$ razdelimo na podintervale z delilnimi točkami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots x_{n-1} < x_n = b. \tag{17.1}$$

Delitev intervala imenujemo tudi *particija* in označimo s P. Širina i-tega delilnega intervala $[x_{i-1}, x_i]$ je

$$\Delta_i x := x_i - x_{i-1}.$$

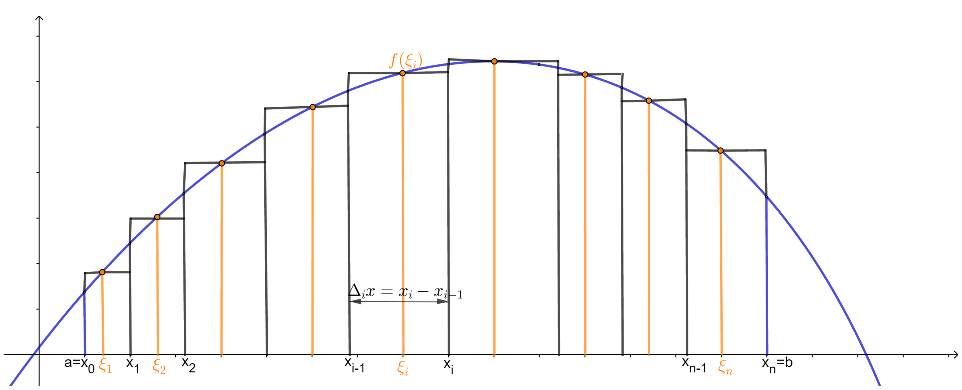
Maksimalno širino delilnih intervalov pri delitvi P bomo označili z Δ_P in imenovali *širina delitve* P, torej

$$\Delta_P = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_i x.$$

V vsakem delilnem intervalu izberimo poljubno točko, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Produkt $f(\xi_i)\Delta_i x$ pomeni ploščino pravokotnika z osnovnico $\Delta_i x$ in višino $f(\xi_i)$. Vsoto

$$S_P := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x, \tag{17.2}$$

imenujemo *Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi P. Ta vsota je seveda odvisna tudi od izbire točk ξ_i, zato oznaka na levi strani enakosti (17.2) ni popolna. Ko jemljemo čedalje finejše particije, torej, ko gredo širine vseh delilnih intervalov proti 0, se zdi, da Riemannove vsote S_P konvergirajo proti iskani ploščini pod grafom funkcije.



Slika 36. Aproksimacija ploščine pod krivuljo v mejah od a do b z vsoto ploščin pravokotnikov, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$

Vendar je tukaj osnovno vprašanje, kako je ploščina definirana za splošne ravninske množice. Čeprav se nam morda zdi, da vsaki ravninski množici lahko pripišemo neko ploščino, se izkaže, da ni tako: obstajajo ravninske množice, ki nimajo nobene ploščine. Za definicijo ploščin likov pod grafi nenegativnih funkcij bomo tukaj vzeli kar limite Riemannovih vsot, vendar naslednji zgled pove, da obstoj teh limit ni očiten.

Zgled 17.1. Naj bo funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirana takole:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{če je } x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{če je } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Če pri dani delitvi P izberemo na vseh delilnih intervalih $[x_{i-1}, x_i]$ za ξ_i racionalno točko, je $f(\xi_i) = 0$ za vse i in ustrezna Riemannova vsota je tedaj 0. Če pa na vseh delilnih intervalih izberemo ξ_i iracionalen, potem je $f(\xi_i) = 1$ za vse i, Riemannova vsota pa je tedaj

$$S_P = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = 1.$$

Ker lahko ti dve izbiri napravimo pri poljubno drobni delitvi P, ne obstaja skupna limita Riemannovih vsot.

Definicija 17.2. Delitev Q je *nadaljevanje delitve* P, če vsebuje vse delilne točke delitve P. To bomo zapisali kar kot $Q \supseteq P$.

Odslej v tem razdelku naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija in P delitev intervala $[a, b]$, kot zgoraj. Za vsak delilni interval $[x_{i-1}, x_i]$ označimo

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \quad \text{in} \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x).$$

Definicija 17.3. Vsoti

$$\underline{S}_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x \quad \text{in} \quad \overline{S}_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x$$

imenujemo *spodnja* in *zgornja Riemannova vsota.*

Očitno je vsaka Riemannova vsota funkcije f pri delitvi P med $\underline{S}_P$ in $\overline{S}_P$. Poglejmo, kaj se zgodi s spodnjo in zgornjo Riemannovo vsoto pri nadaljevanju delitve.

Lema 17.4. *Če je Q nadaljevanje delitve P, je*

$$\underline{S}_P \le \underline{S}_Q \le \overline{S}_Q \le \overline{S}_P. \tag{17.3}$$

Dokaz. Ker lahko vsako nadaljevanje delitve dobimo s postopnim dodajanjem po ene delilne točke, smemo predpostaviti, da se delitev Q razlikuje od P le v eni dodatni točki $t \in (x_{i-1}, x_i)$. Potem se spodnja Riemannova vsota $\underline{S}_Q$ razlikuje od $\underline{S}_P$ le v tem, da nastopa namesto člena $m_i \Delta_i x$ vsota dveh členov $m_{i,1}(t - x_{i-1}) + m_{i,2}(x_i - t)$, kjer smo označili

$$m_{i,1} = \inf_{x_{i-1} \le x \le t} f(x) \quad \text{in} \quad m_{i,2} = \inf_{t \le x \le x_i} f(x).$$

Ker je očitno $m_{i,1} \geq m_i$ in $m_{i,2} \geq m_i$ (saj se infimum funkcije pri prehodu na podinterval ne more zmanjšati), sledi, da velja

$$m_i \Delta_i x = m_i((t - x_{i-1}) + (x_i - t)) \leq m_{i,1}(t - x_{i-1}) + m_{i,2}(x_i - t).$$

Torej je $\underline{S}_P \leq \underline{S}_Q$. Dokaz neenakosti $\overline{S}_Q \leq \overline{S}_P$ pa je podoben in ga prepuščamo bralcu. □

Lema 17.5. *Za poljubni delitvi P in Q velja*

$$\underline{S}_P \leq \overline{S}_Q. \tag{17.4}$$

Dokaz. Naj bo R skupno nadaljevanje delitev P in Q (npr. $R = P \cup Q$). Po prejšnji lemi velja

$$\underline{S}_P \leq \underline{S}_R \leq \overline{S}_R \leq \overline{S}_Q.$$

□

Ta lema pove, da je množica vseh spodnjih Riemannovih vsot $\underline{S}_P$ (dane funkcije), ko P teče po vseh delitvah intervala $[a, b]$, navzgor omejena, zato obstaja njen supremum, ki ga bomo imenovali $\underline{S}$. Lema prav tako pove, da je množica vseh zgornjih Riemannovih vsot $\overline{S}_P$, ko teče P po vseh delitvah intervala $[a, b]$, navzdol omejena (namreč s katerokoli spodnjo Riemannovo vsoto dane funkcije), torej ima infimum, ki ga bomo označili z $\overline{S}$. Neposredna posledica leme je naslednja neenakost:

$$\underline{S}_P \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \overline{S}_P, \tag{17.5}$$

ki velja za vsako delitev P.

Definicija 17.6. Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *integrabilna* (*v Riemannovem smislu*), če za supremum spodnjih in infimum zgornjih njenih Riemannovih vsot velja enakost

$$\overline{S} = \underline{S}.$$

Tedaj to skupno vrednost imenujemo *integral funkcije f v mejah od a do b* in označimo z

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Izrek 17.7. *Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna v Riemannovem smislu.*

Dokaz. Dokazati zadošča, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka delitev P intervala $[a, b]$, da je

$$\overline{S}_P - \underline{S}_P < \varepsilon, \tag{17.6}$$

saj od tod in iz (17.5) sledi, da je $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$, in ker velja to za vsak $\varepsilon > 0$, mora biti $\overline{S} - \underline{S} = 0$, torej $\overline{S} = \underline{S}$.

Kot vemo, je vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu enakomerno zvezna, kar pomeni, da obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x, t \in [a, b]$, ki zadoščata pogoju $|x - t|$

delta, velja $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/(b - a)$. Če je torej delitev P tako drobna, da je širina vseh delilnih intervalov $[x_{i-1}, x_i]$ pod δ (se pravi $\Delta_P < \delta$), potem je $M_i - m_i \leq \varepsilon/(b-a)$, zato

$$\overline{S}_P - \underline{S}_P = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta_i x < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

□

Ker so vse Riemannove vsote pri dani delitvi med spodnjo in zgornjo Riemannovo vsoto, sledi iz dokaza prejšnjega izreka naslednja trditev za zvezne funkcije.

Trditev 17.8. *Če je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna v Riemannovem smislu, potem njene Riemannove vsote $S_P = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$ konvergirajo proti $\int_a^b f(x)\,dx$, ko gre Δ_P proti 0. Natančneje: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|S_P - \int_a^b f(x)\,dx| < \varepsilon$ za vsako Riemannovo vsoto $S_P = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$ pri vsaki taki delitvi P, da je $\Delta_P < \delta$.*

Gornji izrek se da izboljšati, tako da natančno karakteriziramo vse funkcije, ki so integrabilne v Riemannovem smislu.

Definicija 17.9. Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}$ ima *mero* 0, če jo je za vsak $\varepsilon > 0$ mogoče pokriti s kakim zaporedjem odprtih intervalov I_j (se pravi, da je $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} I_j$), katerih vsota dolžin je pod ε. (To bomo zapisali kot $\sum_j |I_j| < \varepsilon$.)

Zgled 17.10. Vsaka končna množica $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ima mero 0, saj jo lahko pokrijemo z intervali $(x_j - \frac{\varepsilon}{4n}, x_j + \frac{\varepsilon}{4n})$.

Splošneje, tudi vsako zaporedje $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots,\}$ ima mero 0. Okrog točke x_j lahko namreč vzamemo interval $(x_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}, x_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+2}})$ $(j = 1, \ldots, n)$. Vsi ti intervali skupaj očitno pokrivajo A, vsota njihovih dolžin pa je $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{j+2}} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Obstajajo podmnožice v $\mathbb{R}$, ki niso števne (pravzaprav imajo toliko elementov, kot je vseh realnih števil), a imajo mero 0. Tukaj ne bomo navedli nobenega takega zgleda.

Izrek 17.11. *Omejena funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna v Riemannovem smislu natanko tedaj, ko ima množica vseh tistih točk, v katerih ni zvezna, mero* 0.

*********************** Naslednji dokaz lahko preskočite.

Zelo zgoščen oris dokaza. Naj bo N množica točk nezveznosti funkcije f.

V posebnem primeru, kadar se N da za vsak $\varepsilon > 0$ pokriti s končno mnogo odprtimi intervali I_j z vsoto dolžin pod ε, gledamo razliko med zgornjo in spodnjo Riemannovo vsoto pri vsaki taki delitvi P, ki med delilnimi točkami vsebuje tudi vsa krajišča intervalov I_j. Ta razlika je sestavljena iz členov dveh tipo: En tip predstavljajo členi, ki odgovarjajo tistim delilnim intervalom, ki so vsebovani v kakem intervalu I_j Prispevek teh členov je majhen, ker je vsota dolžin vseh intervalov I_j pod ε. (Omejen je z $C\varepsilon$, kjer je konstanta C razlika med supremumom in infimom funkcije f na intervalu $[a,b]$.) Drugi tip členov pa so tisti, katerih delilni intervali ne sekajo intervalov I_j. Prispevek le teh pa lahko ocenimo kot v dokazu prejšnjega izreka, saj je funkcija f enakomerno zvezna na množici $[a,b] \setminus \cup_j I_j$, ki je unija končno mnogo zaprtih intervalov. Pri dovolj drobni delitvi P je torej razlika $\overline{S}_P - \underline{S}_P$ tako majhna kot hočemo.

V splošnem pa moramo za vsak $x \in [a, b]$ najprej definirati funkcijo

$$\omega(x) = \inf_{\delta>0} \left(\sup_{|t-x|<\delta} f(t) - \inf_{|t-x|<\delta} f(t) \right)$$

in opaziti, da je f zvezna v točki x natanko tedaj, ko je $\omega(x) = 0$. Nadalje je za vsak pozitiven c množica $N_c := \{x \in [a, b] : \omega(x) \geq c\}$ kompaktna (kar pomeni, da ima vsako zaporedje njenih elementov stekališče v njej): Ker je $N_c \subseteq N$, ima N_c mero 0. Ker pa je N_c kompaktna, je mogoče iz vsakega njenega pokritja z odprtimi intervali izbrati kako končno podpokritje. Zato sedaj lahko uporabimo sklepanje iz prejňjega odstavka; če izberemo dovolj majhen c, lahko (ker na komplementu množice N_c funkcija f le malo niha) dosežemo, da bo za dovolj drobno delitev P razlika med zgornjo in spodnjo Riemannovo vsoto tako majhna kot želimo.

Za dokaz v obratno smer pa opazimo, da morajo pri integrabilni funkciji f razlike $\overline{S}_P - \underline{S}_P$ konvergirati proti 0, ko gre Δ_P proti 0. To je mogoče le, če imajo vse množice N_c mero 0. Ker je množica točk nezveznosti funkcije f ravno unija $N = \cup_{j=1}^{\infty} N_{\frac{1}{j}}$, sledi (po krajšem razmisleku), da mora tudi N imeti mero 0. $\square$

Zgled 17.12. Izračunajmo po definiciji $\int_0^1 x^2\, dx$.

Zaradi lažjega računanja bomo razdelili interval $[0, 1]$ na enake dele, čeprav definicija integrala ne zahteva, da so deli enaki. Delilne točke so potem $\frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, kjer je n število delilnih intervalov. Dolžina vsakega delilnega intervala je tedaj $\Delta_i x = \frac{1}{n}$. V vsakem od delilnih intervalov $[x_{i-1}, x_i] = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ izberimo za ξ_i kar desno krajišče, torej $\xi_i = \frac{i}{n}$. Riemanova vsota funkcije $f(x) = x^2$ pri tej delitvi intervala $[0, 1]$ je

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2 \frac{i}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

kjer smo uporabili znano srednješolsko formulo za vsoto kvadratov zaporednih naravnih števil. Da bo konvergirala dolžina $\frac{1}{n}$ delilnih intervalov proti 0, mora n konvergirati proti ∞, torej je

$$\lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

S tem smo izračunali, da je $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$.

Ni jasno, kako bi iz definicije lahko računali integrale splošnejših funkcij od tiste iz prejšnjega zgleda. Zato bomo v naslednjem razdelku spoznali popolnoma drugačno metodo, ki temelji na povezavi integrala z odvodom. Še prej pa si oglejmo osnovne lastnosti integrala.

Trditev 17.13. *Bodita $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji. Potem je integrabilna tudi funkcija $f + g$ in velja*

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx. \tag{17.7}$$

Nadalje je za vsako konstanto c funkcija cf integrabilna in velja

$$\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \tag{17.8}$$

Dokaz. Da je $f+g$ integrabilna funkcija, sledi iz izreka 17.11, mogoče pa je dokazati tudi direktno, z upoštevanjem neenakosti

$$\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i}(f+g)(x) \ge \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) + \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} g(x)$$

in

$$\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}(f+g)(x) \le \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) + \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} g(x),$$

vendar bomo ta dokaz pustili za nalogo. Pokazali bomo le enakost (17.7). Po trditvi 17.8 imamo

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n (f+g)(\xi_i)\Delta_i x = \lim_{\Delta_P\to 0}[\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x + \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta_i x]$$

$$= \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x + \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Podobno dokažemo tudi enakost (17.8). □

Formuli (17.7) in (17.8) lahko združimo v eno:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx, \tag{17.9}$$

ki velja za poljubni konstanti α, β in integrabilni funkciji $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Trditev 17.14. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija in $c \in [a,b]$. Tedaj je f integrabilna na intervalu $[a,b]$ natanko tedaj, ko je integrabilna na obeh intervalih $[a,c]$ in $[c,b]$. Takrat velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{17.10}$$

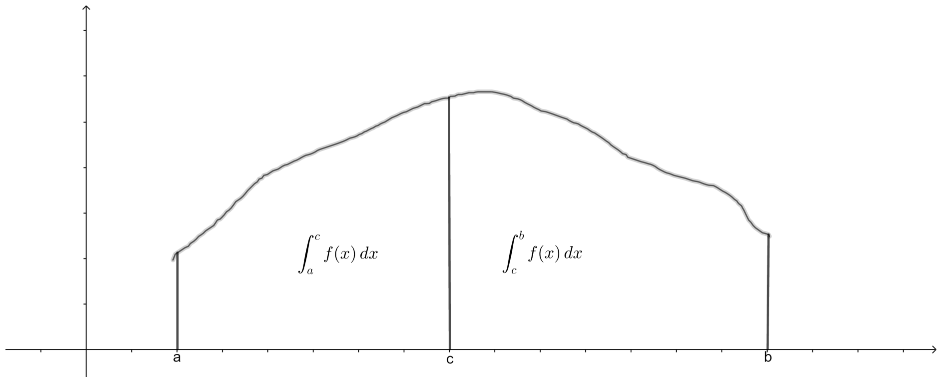
Dokaz. Izjava o integrabilnosti sledi hitro iz izreka 17.11, njen direktni dokaz pa bomo pustili za nalogo.

Za dokaz formule (17.10) bomo spet uporabili trditev 17.8. Bodita $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ in $Q = \{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\}$ poljubni delitvi intervalov $[a,c]$ in $[c,b]$, kjer je $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = c$ in $c = x_n < x_{n+1} < \ldots < x_m = b$. Potem je $P \cup Q$ delitev intervala $[a,b]$. Za poljubne $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ velja:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x + \lim_{\Delta_Q\to 0}\sum_{i=n+1}^m f(\xi_i)\Delta_i x$$

$$= \lim_{\Delta_{P\cup Q}\to 0}\sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□



Slika 37. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Očitno je $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Če je $b < a$ definiramo

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx.$$

To je v skladu s formulo (17.10), saj je po tej definiciji

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0 = \int_a^a f(x)\,dx.$$

Lahko se je prepričati, da velja formula (17.10) za poljubne $a, b, c \in \mathbb{R}$ (tudi če c ni med a in b).

Trditev 17.15. *Če sta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (kjer je $a < b$) taki integrabilni funkciji, da je $f(x) \le g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{17.11}$$

Dokaz. Za Riemannove vsote teh dveh funkcij velja

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \le \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta_i x.$$

Ko vzamemo na obeh straneh te neenakosti limito, ko gre Δ_P proti 0, sledi po trditvi 17.8 enakost (17.11). □

Če uporabimo to trditev na funkciji $|f|$, namesto g, dobimo $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$, kadar je $a \le b$. Ko uporabimo to neenakost na funkciji $-f$, namesto f, dobimo še $-\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. Torej velja:

Posledica 17.16. $|\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$, *če je $a \le b$.*

Poseben primer trditve 17.15 dobimo, če vzamemo za funkcijo g konstanto, namreč zgornjo mejo M. Ker je $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$, sledi, da je $\int_a^b f(x)\,dx \le$

$M(b-a)$. Podobno velja tudi $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx$, kjer je m spodnja meja funkcije f. Torej velja naslednja posledica:

Posledica 17.17. *Če je m spodnja, M pa zgornja meja integrabilne funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, je*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

kadar je $a \le b$.

Iz te posledice lahko izpeljemo naslednji izrek.

Izrek 17.18. *(Izrek o povprečju) Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Obstaja tak $\xi \in [a,b]$, da je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{17.12}$$

Dokaz. Če je $b = a$, je edina možnost $\xi = a$ in tedaj sta obe strani formule (17.12) enaki 0, zato smemo vzeti, da je $a < b$. Naj bo $m = \min_{a \le x \le b} f(x)$ in $M = \max_{a \le x \le b} f(x)$. Po posledici 17.17 velja

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M.$$

Ker zavzame zvezna funkcija f vsako vrednost med m in M, sledi od tod, da obstaja tak $\xi \in [a,b]$, da je

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}. \tag{17.13}$$

□

Formula (17.13) pomeni, da funkcija f zavzame v točki ξ svojo *povprečno vrednost* na intervalu $[a,b]$.

Nalogi. 1. Dokažite neposredno (tj. brez uporabe izreka 17.11), da je vsota integrabilnih funkcij integrabila.

2. Dokažite, da je funkcija $|f|$ integrabilna, če je integrabilna f.

18. Povezava med integralom in odvodom

Za integrabilno funkcijo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si oglejmo funkcijo

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt. \tag{18.1}$$

Ker je x zgornja meja integrala v (18.1), smo morali integracijsko spremenljivko označiti drugače; imenovali smo jo t. F je torej integral od f, kot funkcija zgornje meje.

Trditev 18.1. *Če je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena integrabilna funkcija, je F zvezna.*

Dokaz. Pokazati moramo, da gre $F(x+h)-F(x)$ proti 0, ko gre h proti 0, in sicer za vsak $x \in [a,b]$. Po trditvi 17.14 imamo

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Naj bo $M=\sup_{a\le t\le b}|f(t)|$. Z uporabo posledic 17.16 in 17.17 sledi, da je

$$|F(x+h)-F(x)|=|\int_x^{x+h} f(t)\,dt|\le|\int_x^{x+h}|f(t)|\,dt|\le|\int_x^{x+h} M\,dt|=M|h|.$$

Od tod je očitno, da gre $F(x+h)-F(x)$ proti 0, ko gre h proti 0. □

Dospeli smo do najpomembnejšega izreka.

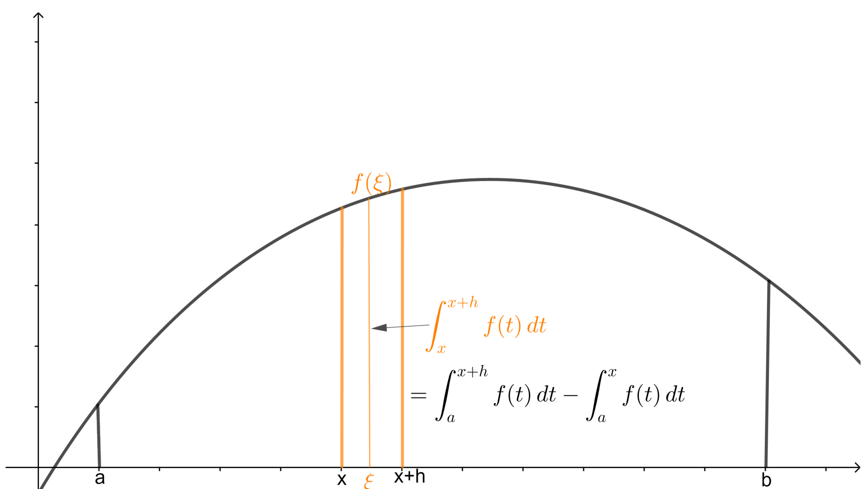
Izrek 18.2. *(Osnovni izrek integralskega računa) Za vsako zvezno funkcijo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je funkcija F, ki je definirana z (18.1), odvedljiva v vsaki točki $x\in[a,b]$ (ko je $x=a$ ali pa $x=b$, sta tukaj mišljena odvod z desne oziroma leve) in velja*

$$F'(x)=f(x). \tag{18.2}$$

Dokaz. Kot v dokazu prejšnje trditve je

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Od tod sledi po izreku o povprečju, da obstaja tak $\xi\in[x,x+h]$, da velja:



Slika 38. Integral $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ je ploščina rumeno obrobljenega "pravokotnika". Ko jo delimo z osnovnico h, dobimo povprečno "višino" $f(\xi)$, ki gre proti $f(x)$, ko gre h proti 0.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}=f(\xi). \tag{18.3}$$

Ko gre h proti 0, gre ξ proti x (saj je ξ vedno med x in $x+h$), zato gre $f(\xi)$ proti $f(x)$ (saj je f zvezna funkcija). Iz enakosti (18.3) zato sledi, da je $F'(x) = f(x)$. $\square$

Poglejmo, zakaj nam osnovni izrek integralskega računa omogoča računanje integralov. Predpostavimo, da smo uspeli ugotoviti kako tako funkcijo G, da je njen odvod f, torej $G'(x) = f(x)$. Ker je tudi $F'(x) = f(x)$ za vse x, je $(F-G)' \equiv 0$, zato $F(x) - G(x) = C$, kjer je C konstanta. Ko vstavimo v to enakost $x = a$, dobimo $F(a) - G(a) = C$. Ker je $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, to pomeni, da je $G(a) = -C$, in sledi

$$F(x) = G(x) - G(a).$$

Ko vstavimo v to formulo $x = b$, dobimo naslednjo zelo pomembno posledico:

Posledica 18.3. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, G pa taka funkcija, da je $G' = f$. Potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a). \tag{18.4}$$

Definicija 18.4. Funkcijo G, ki zadošča pogoju $G' = f$, imenujemo antiodvod ali *nedoločeni integral funkcije* f in označimo kot

$$\int f(x)\,dx.$$

Dve funkciji, ki imata isti odvod, se lahko razlikujeta za konstanto, od tod ime "nedoločeni integral"; funkcija G, katere odvod je f, je namreč določena le do aditivne konstante natančno.

Enakost (18.4) ponavadi zapišemo kot

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)|_a^b,$$

kjer oznaka $G(x)|_a^b$ nakazuje, da moramo G izračunati najprej pri zgornji meji b nato pri spodnji meji a in odšteti.

Zgled 18.5. Ker je odvod funkcije $\frac{x^3}{3}$ enak x^2, je

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Računanje integralov se torej prevede na operacijo, nasprotno odvajanju. Zato si je primerno zapomniti antiodvode (tj. nedoločene integrale) najpogosteje nastopajočih elementarnih funkcij.

Zgledi (kjer je $a \neq 0$ konstanta):

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{če je } n \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C\ ; \quad \int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C;$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad (a \neq 0); \quad \int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{\operatorname{sh} ax}{a} + C, \quad \int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{\operatorname{ch} ax}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Dve najosnovnejši metodi, ki pomagata pri računanju integralov, sta vpeljava nove spremenljivke in integriranje po delih.

18.1. **Vpeljava nove spremenljivke.** Iz pravila za posredno odvajanje sledi:

Trditev 18.6. *Če je $x = g(t)$, kjer je g odvedljiva funkcija, je*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Dokaz. Označimo $F(x) = \int f(x)\,dx$ in $G(t) = F(g(t))$. Potem je $F'(x) = f(x)$ in (po pravilu za posredno odvajanje)

$$G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t),$$

od koder sledi po definiciji nedoločenega integrala, da je $G(t) = \int f(g(t))g'(t)\,dt$. Sedaj imamo

$$\int f(x)\,dx = F(x) = F(g(t)) = G(t) = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

$\square$

Kako pa je z vpeljavo nove spremenljivke v določeni integral? Recimo, da spremenljivka t preteče interval $[\alpha, \beta]$ in da je $x = g(t)$, kjer je g odvedljiva funkcija na intervalu $[\alpha, \beta]$. Iz trditve 18.6 sledi, da je $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$. Vendar pa je običajno situacija taka, da imamo podani meji a in b v integralu $\int_a^b f(x)\,dx$, ki ga hočemo izračunati in, ko vpeljemo novo spremenljivko t prek zveze $x = g(t)$, moramo ugotoviti meji α in β za spremenljivko t. Poiskati je treba torej taka α in β, da bo $g(\alpha) = a$ in $g(\beta) = b$. To je mogoče napraviti enolično, če g preslika kak interval $[\alpha, \beta]$ bijektivno na interval $[a, b]$. Tedaj je namreč $\alpha = g^{-1}(a)$ in $\beta = g^{-1}(b)$ ali pa $\alpha = g^{-1}(b)$ in $\beta = g^{-1}(a)$. Ker je g odvedljiva in s tem zvezna, je bijektivnost ekvivalentna strogi monotonosti. Če označimo $\vartheta = g^{-1}$, lahko trditev 18.6 za določene integrale formuliramo takole:

Trditev 18.7. *Naj bo $\vartheta : [a, b] \to [\vartheta(a), \vartheta(b)]$ odvedljiva monotona funkcija in $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\vartheta(a)}^{\vartheta(b)} f(\vartheta^{-1}(t))(\vartheta^{-1})'(t)\,dt.$$

Zgled 18.8. (i) V integrale oblike

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

vpeljemo novo spremenljivko t prek zveze $t = f(x)$. Tedaj je namreč $dt = f'(x)\,dx$ in zato integral preoblikujemo v

$$\int \frac{dt}{t},$$

katerega vrednost je $\ln|t| + C$. Rezultat je torej $\ln|f(x)| + C$. Kot posebne primere imamo:

$$\int \frac{dx}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C, \quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$$

(ii) V integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

vpeljemo novo spremenljivko prek zveze $x = \sin t$, da se znebimo korena. Ker je tedaj $dx = \cos t\,dt$, dobimo tako

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

Ko se vrnemo na prvotno spremeljivko in upoštevamo, da je $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$, dobimo rezultat

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

(iii) V integral

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a > 0)$$

vpeljimo novo spremenljivko prek zveze $x = a\sin t$. Ker je $a\sin : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, a]$ monotona bijekcija, sledi

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = a^2[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4},$$

kjer smo v predzadnji enakosti uporabili prejšnji zgled.

Naloge. Izračunajte naslednje integrale:
1. $\int \cos(ax+b)\,dx$, kjer sta a in b konstanti.
2. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$. (Namig: $1 + x^2 = t^2$, $t\,dt = x\,dx$.)
3. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$. (Namig: $x = \operatorname{sh} t$.)
4. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. (Namig: $x = \sin t$.)

18.2. **Integriranje po delih.** Iz odvoda produkta

$$(fg)' = f'g + fg'$$

sledi $f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$ oziroma:

Trditev 18.9. $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$.

.
Če označimo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, je $du = f'(x)\,dx$, $dv = g'(x)\,dx$ in formulo iz prejšnje trditve lahko zapišemo kot

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{18.5}$$

Imenujemo jo formula za *integriranje po delih* ali *per partes.*

Zgled 18.10. (i) V integralu

$$I = \int (x^2+2)e^x\,dx$$

bomo vzeli $u = x^2+2$ in $dv = e^x\,dx$. Z integriranjem per partes dobimo

$$\int (x^2+2)e^x\,dx = (x^2+2)e^x - \int e^x 2x\,dx.$$

Sedaj moramo ponovno integrirati per partes in sicer naj bo tokrat $u = 2x$ in $dv = e^x\,dx$, da dobimo

$$I = (x^2+2)e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x + C.$$

Na enak način bi izračunali vsak integral tipa $\int p(x)e^x\,dx$. Per partes bi morali integrirati tolikokrat, kolikor je stopnja polinoma p; na vsakem koraku bi se stopnja polinoma zmanjšala za 1.

(ii)V integralu

$$I = \int x^n \ln x\,dx$$

vzemimo $u = \ln x$ in $dv = x^n\,dx$. Potem je $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, če je $n \neq -1$, in $v = \ln|x|$, če je $n = -1$. Nadalje je $du = \frac{dx}{x}$ in integriranje po delih da

$$I = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{x}, & \text{če je } n \neq -1; \\ \ln|x|\ln x - \int \ln|x|\frac{dx}{x}, & \text{če je } n = -1. \end{cases}$$

Ker je funkcija ln definirana le za pozitivne x, je tukaj $\ln|x| = \ln x$ in, ko v integral $\int \ln x \frac{dx}{x}$ vpeljemo novo spremenljivko $t = \ln x$ ter ga izračunamo, sledi

$$I = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, & \text{če je } n \neq -1; \\ \frac{\ln^2 x}{2} + C, & \text{če je } n = -1. \end{cases}$$

Na enak način bi lahko izračunali vsak integral tipa $\int p(x)\ln x\,dx$, kjer je p polinom.

(iii) Za izračun integrala

$$I = \int_0^1 \arcsin x\,dx$$

naj bo $u = \arcsin x$ in $dv = dx$. Torej je $v = x$ in

$$I = x\arcsin x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

V zadnji integral vpeljemo novo spremenljivko $t = \sqrt{1-x^2}$, ki je monotona funkcija na intervalu $[0,1]$. Potem je $t^2 = 1 - x^2$, od koder dobimo z diferenciranjem $x\,dx = -t\,dt$ in sledi

$$I = \frac{\pi}{2} + \int_1^0 dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(iv) V integral

$$I = \int e^{ax} \sin bx\,dx,$$

kjer sta a in $b \neq 0$ konstanti, vpeljimo $u = e^{ax}$ in $dv = \sin bx\,dx$. Potem je $v = -\frac{\cos bx}{b}$ in

$$I = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

V zadnji integral vpeljimo $u = e^{ax}$ in $dv = \cos bx$, da dobimo

$$I = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}[e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx] = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{a^2}{b^2}I.$$

To je linearna enačba za neznanko I, iz katere izračunamo

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Nalogi. 1. Izračunajte $\int_0^{\pi/4} e^x \cos x\,dx$.
2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Integral

$$I_n = \int \cos^n x\,dx$$

integrirajte po delih tako, da vzamete $u = \cos^{n-1} x$ in $dv = \cos x\,dx$ ter nato v dobljenem integralu upoštevate zvezo $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Izpeljite na ta način rekurzivno formulo

$$I_n = \frac{1}{n}[(n-1)I_{n-2} + \cos^{n-1} x \sin x].$$

Izračunajte npr. I_5.

19. Integriranje nekaterih funkcij

Najlažji način integriranja je z uporabo računalniških programov za simbolno računanje, zato nam dandanes ni treba posvetiti toliko pozornosti tehnikam integriranja kot nekoč. Kljub temu pa je primerno poznati nekaj najosnovnejših metod.

19.1. **Integriranje racionalnih funkcij.** Racionalna funkcija je kvocient $\frac{p}{q}$ dveh polinomov, kjer smemo brez izgube splošnosti privzeti, da je vodilni koeficient polinoma q enak 1 (sicer delimo števec in imenovalec z vodilnim koeficientom polinoma q). Če je stopnja polinoma p večja ali enaka od stopnje polinoma q, najprej delimo: $\frac{p}{q} = k + \frac{r}{q}$. Tukaj je k polinom, r pa polinom, stopnje manjše od stopnje polinoma q. Ker polinoma k ni težko integrirati, se lahko posvetimo integralu $\int \frac{r}{q}\,dx$. To je spet integral racionalne funkcije, le da je tokrat stopnja števca manjša od stopnje imenovalca. Vprašanje je torej, kako izračunati integral oblike

$$\int \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer je stopnja polinoma p manjša od stopnje polinoma q in ima q vodilni koeficient 1. Oba polinoma naj imata realne koeficiente. Znano je, da tak polinom q lahko razstavimo kot

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_k)^{m_k} (x^2 + a_1 x + b_1)^{n_1} \cdots (x^2 + a_l x + b_l)^{n_l},$$

kjer so $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ vse realne ničle polinoma q, $m_1, \ldots, m_k$ njihove mnogokratnosti, kvadratni faktorji $x^2 + a_1 x + b_1, \ldots, x^2 + a_l x + b_l$ pa nerazcepni (njihove diskriminante torej negativne) in njihove mnogokratnosti $n_1, \ldots, n_l$ naravna števila. Da se dokazati (vendar tega ne bomo storili tukaj, ker je to stvar algebre), da potem p/q lahko izrazimo kot

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = {} & \frac{A_{1,1}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \ldots \\ & + \frac{A_{k,1}}{x-\alpha_k} + \frac{A_{k,2}}{(x-\alpha_k)^2} + \ldots + \frac{A_{k,m_k}}{(x-\alpha_k)^{m_k}} + \ldots \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + a_1 x + b_1} + \ldots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{n_1}} + \ldots \\ & + \frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{x^2 + a_l x + b_l} + \ldots + \frac{B_{l,n_l}x + C_{l,n_l}}{(x^2 + a_l x + b_l)^{n_l}}, \end{aligned} \tag{19.1}$$

kjer so konstante $A_{1,1}, \ldots, C_{l,n_l}$ neznane. Te konstante izračunamo tako, da obe strani enakosti (19.1) pomnožimo s q in izenačimo koeficiente dobljenih dveh polinomov, kar privede do sistema linearnih enačb z neznankami $A_{1,1}, \ldots, C_{l,n_l}$. Tak zapis racionalne funkcije imenujemo *razcep na parcialne ulomke.*

Zgled 19.1. (i) Racionalno funkcijo $\frac{x}{(x+2)^2(x-1)}$ bomo razstavili kot

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Ko pomnožimo to enačbo z $(x+2)^2(x-1)$, dobimo

$$x = A(x+2)(x-1) + B(x-1) + C(x+2)^2. \tag{19.2}$$

Ko vstavimo v to enakost $x = 1$, dobimo $1 = C3^2$, torej je $C = \frac{1}{9}$. Ko pa vstavimo $x = -2$, dobimo $-2 = -3B$, torej $B = \frac{2}{3}$. Za izračun neznanke A bi sedaj lahko vstavili $x = 0$.

Drugi, nekoliko daljši, način je, da izenačimo koeficiente pred istimi potencami v polinomih na levi in desni strani enakosti (19.2). Koeficient pred x^2 na desni strani enakosti (19.2) je $A + C$, na levi pa 0, torej je $A + C = 0$. Ko izenačimo še koeficiente pred x in pred 1, dobimo na ta način sistem enačb

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B + 4C &= 1 \\ -2A - B + 4C &= 0. \end{aligned}$$

Njegova rešitev je $A = -\frac{1}{9}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{1}{9}$. Torej imamo

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{-1}{9(x+2)} + \frac{2}{3(x+2)^2} + \frac{1}{9(x-1)}. \tag{19.3}$$

(ii) Racionalno funkcijo $\frac{x^4-x^3+5x^2+x+3}{(x+1)(x^2-x+1)^2}$, kjer je stopnja števca manjša od stopnje imenovalca in je kvadratni faktor x^2-x+1 nerazcepen (saj je njegova diskriminanta -3), poskusimo napisati kot

$$\frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2 - x + 1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 - x + 1)^2}. \tag{19.4}$$

Ko pomnožimo z $(x+1)(x^2 - x + 1)$, dobimo

$$x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3 = A(x^2 - x + 1)^2 + (Bx + C)(x+1)(x^2 - x + 1) + (Dx + E)(x+1). \tag{19.5}$$

Če vstavimo v to enakost $x = -1$, takoj dobimo, da je $9 = 3^2 A$, torej $A = 1$. Za izračun drugih konstant pa bomo izenačili koeficiente pred istimi potencami v polinomih na desni in levi strani enakosti (19.5). Koeficient pred x^4 na desni strani enakosti (19.5) je $A + B$, na levi strani pa 1, torej $A + B = 1$. Ko izenačimo koeficiente še pred x^3, x^2, x in 1, dobimo naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -2A + C &= -1 \\ 3A + D &= 5 \\ -2A + B + D + E &= 1 \\ A + C + E &= 3. \end{aligned}$$

Ker že vemo, da je $A = 1$, lahko iz prvih štirih enačb takoj izračunamo $B = 0$, $C = 1$, $D = 2$ in $E = 1$, zadnja enačba pa lahko služi za kontrolo. Razcep (19.4) se sedaj glasi

$$.\frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} \tag{19.6}$$

Naloga. Razcepite na parcialne ulomke funkcijo

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)^3(x^2 + x + 1)^2}.$$

Ko smo racionalno funkcijo zapisali v obliki (19.1), moramo povedati le še, kako integriramo vse člene na desni strani formule (19.1). Za člene oblike $\frac{1}{x-\alpha}$ in $\frac{1}{(x-\alpha)^m}$

to že vemo: taka dva integrala izračunamo s vpeljavo nove spremenljivke $t = x - \alpha$ in dobimo

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C \ \text{ in } \ \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = \frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}}, \text{če je } m = 2, 3, \ldots.$$

Oglejmo si sedaj še člene oblike $\frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^n}$. Integral

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^n}\, dx$$

bomo najprej poenostavili tako, da bomo izločili del, v katerem bo števec odvod kvadratne funkcije v imenovalcu:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^n}\, dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n}\, dx + \int \frac{C - a\frac{B}{2}}{(x^2+ax+b)^n}\, dx.$$

Prvi integral na desni lahko izračunamo z novo spremenljivko $t = x^2 + ax + b$, saj ga to preoblikuje v $\int \frac{dt}{t^n}$. Tako moramo sedaj obravnavati le še integral

$$\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n}.$$

Zapišemo ga lahko kot

$$\int \frac{dx}{[(x+\frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}]^n}, \tag{19.7}$$

pri čemer je $b - \frac{a^2}{4} > 0$, saj je diskriminanta $a^2 - 4b$ kvadratne funkcije $x^2 + ax + b$ po predpostavki negativna. Torej lahko zapišemo $b - \frac{a^2}{4} = c^2$ za kak pozitiven $c \in \mathbb{R}$ in potem preoblikujemo integral (19.7) v

$$\frac{1}{c^{2n}} \int \frac{dx}{[(\frac{x+\frac{a}{2}}{c})^2 + 1]^n}. \tag{19.8}$$

V ta integral vpeljemo spremenljivko $t = \frac{x+\frac{a}{2}}{c}$, kar ga preoblikuje v konstanten večkratnik integrala

$$I_n := \int \frac{dt}{[t^2+1]^n}. \tag{19.9}$$

Če je $n = 1$, je integral v (19.9) enak $I_1 = \operatorname{arctg} t + C$. Za $n = 2, 3, \ldots$ pa ravnamo takole:

$$I_n = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^n}\, dt - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\, dt = I_{n-1} - \int t \frac{t}{(t^2+1)^n}\, dt.$$

Zadnji integral bomo izračunali per partes in sicer naj bo $u = t$ in $dv = \frac{t\,dt}{(t^2+1)^n}$. Potem je $v = \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}$ in sledi

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} \\ &= I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Tako smo izpeljali rekurzivno formulo

$$I_n = [1 - \frac{1}{2(n-1)}]I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} \tag{19.10}$$

iz katere lahko postopoma izračunamo vse I_n. Npr.

$$I_2 = [1 - \frac{1}{2}]I_1 + \frac{t}{2(t^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}. \tag{19.11}$$

Zgled 19.2. Izračunajmo integral iz zgleda 19.1(ii), tj. (glejte (19.6))

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2-x+1)^2}\, dx = \int \frac{1}{x+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2-x+1}\, dx + \int \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}\, dx.$$

Prvi integral na desni je $\ln|x+1|$, drugi pa je

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]} &= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})^2 + 1} \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2 + 1}, \quad (t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}},\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Izračunati moramo le še

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}\, dx,$$

kar po gornjih napotkih napišemo kot

$$\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\, dx + 2\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2},$$

saj substitucija $t = x^2 - x + 1$ preoblikuje prvega od teh dveh integralov v $\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-x+1}$. Preostane še

$$\begin{aligned}2\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} &= 2\int \frac{dx}{[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} = \frac{32}{9}\int \frac{dx}{[\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + 1]^2} \\ &= \frac{32}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \quad (t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}) \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{9} I_2,\end{aligned}$$

kjer je I_2 podan s (19.11), torej

$$\begin{aligned}I_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{2\frac{4x^2-4x+1}{3} + 2} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{2x-1}{(x^2-x+1)}.\end{aligned}$$

Tako dobimo

$$2\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Ko združimo vse te delne rezultate, dobimo končno

$$\int\frac{x^4-x^3+5x^2+x+3}{(x+1)(x^2-x+1)^2}\,dx$$

$$=\ln|x+1|+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{8\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+C$$

$$=\ln|x+1|+\frac{14\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{4x-5}{3(x^2-x+1)}+C.$$

Naloge. Izračunajte naslednje integrale:
1. $\int\frac{x\,dx}{(x+2)^2(x-1)}$.
2. $\int\frac{x^3+5x^2+9x+5}{x^2+3x+1}\,dx$.
3. $\int\frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$.
4. $\int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$.

19.2. **Integrali trigonometrijskih funkcij.** (i) Integrale tipa $\int\sin ax\cos bx\,dx$ izračunamo z uporabo formule $\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x]$. Če je $b\neq\pm a$, sledi od tod

$$\int\sin ax\cos bx\,dx=-\frac{1}{2}[\frac{\cos(a-b)x}{a-b}+\frac{\cos(a+b)x}{a+b}].$$

Če pa je $b=\pm a$, imamo

$$\int\sin ax\cos ax\,dx=\frac{1}{2}\int\sin 2ax\,dx=-\frac{\cos 2ax}{4a}+C,\ \text{kadar je } a\neq 0.$$

Podobno izračunamo integrale

$$\int\sin ax\sin bx\,dx\quad\text{in}\quad\int\cos ax\cos bx\,dx$$

z uporabo formul $\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]$, $\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]$.

(ii) Pri integralih tipa $\int\cos^m x\sin^n x\,dx$, kjer sta m in n naravni števili, moramo ločiti dve možnosti. (1) Vsaj eno od števil m in n je liho; recimo, da je m liho, $m=2k+1$. Tedaj v integral

$$\int\cos^{2k+1}x\sin^n x\,dx=\int\sin^n x(\cos^2 x)^k\cos x\,dx$$

vpeljemo novo spremenljivko $t=\sin x$, da dobimo

$$\int t^n(1-t^2)^k\,dt,$$

kar je integral polinoma, ki ga je lahko izračunati.

(2) Obe števili m in n sta sodi, torej $m = 2k$, $n = 2l$. Tedaj je

$$\int \cos^{2k} x \sin^{2l} x \, dx = \int (\frac{1 + \cos 2x}{2})^k (\frac{1 - \cos 2x}{2})^l \, dx.$$

Ko razvijemo $(1 + \cos 2x)^k$ in $(1 - \cos 2x)^l$ po binomski formuli in zmnožimo, dobimo vsoto integralov oblike $\int \cos^p 2x \, dx$. Za lihe $p = 2q + 1$ lahko take integrale izračunamo kot v točki (1): $\int \cos^{2q+1} 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos^{2q} 2x \, d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \int (1 - t^2)^q \, dt$. Za sode $p = 2q$ pa je

$$\int \cos^p 2x \, dx = \int (\cos^2 2x)^q \, dx = \int (\frac{1 + \cos 4x}{2})^q \, dx.$$

Ko razvijemo $(1 + \cos 4x)^q$ po binomski formuli, dobimo kombinacijo integralov oblike $\int \cos^j 4x \, dx$, kjer je $j \le q < p$. Le te potem obravnavamo na enak način. Ker se v tem postopku eksponenti zmanjšujejo, prej ali slej prispemo do cilja.

Zgled 19.3. (i) V integral $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$ vpeljemo $t = \sin x$, da dobimo $\int t^3(1 - t^2) \, dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6}{6} + C$.

(ii) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (\frac{\sin 2x}{2})^2 \, dx = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8}(x - \frac{\sin 4x}{4}) + C$.

Naloga. Izračunajte $\int \cos^4 x \, dx$ in $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx$.

Integral tipa

$$\int R(\cos x, \sin x) \, dx, \tag{19.12}$$

kjer je R racionalna funkcija dveh spremenljivk, je vedno mogoče prevesti na integral navadne racionalne funkcije s substitucijo

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Tedaj je namreč

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

in podobno

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Nadalje je $x = 2 \operatorname{arctg} t$ in od tod $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Ko vse to upoštevamo v integralu (19.12), dobimo

$$\int R(\cos x, \sin x) \, dx = \int R(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}) \frac{2dt}{1 + t^2},$$

kar je integral racionalne funkcije. Vendar pa je ta postopek precej zamuden, zato ga raje prepustimo računalnikom. Za zgled lahko bralec na ta način izračuna npr. integral

$$\int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin x},$$

ki ga je seveda mogoče mnogo lažje izračunati s substitucijo $t = \sin x$.

19.3. **Integrali oblike** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ **$(a \neq 0)$.** Ker je

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{|a|}\sqrt{\pm x^2 \pm b_1 x \pm c_1},$$

lahko take integrale prevedemo na enega od tipov

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+b_1x+c_1}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b_1x+c_1}}. \tag{19.13}$$

Kvadratno funkcijo pod korenom prvega od teh integralov lahko zapišemo kot $-(x-\frac{b_1}{2})^2+\frac{b_1^2}{4}+c_1$. Če je $c_1+\frac{b_1^2}{4} \leq 0$, je pod korenom v integralu negativna funkcija, zato koren ni realen in nam tega integrala tukaj ni treba obravnavati. Če pa je število $\frac{b_1^2}{4}+c_1$ pozitivno, ga lahko zapišemo kot d^2 za kak pozitiven d in tedaj je $-x^2+b_1x+c_1 = d^2[-(\frac{x-\frac{b_1}{2}}{d})^2+1]$. Tedaj substitucija $t = \frac{x-\frac{b_1}{2}}{d}$ reducira prvi integral v (19.13) na $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$.

Zgled 19.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4[\frac{41}{64}-(x+\frac{3}{8})^2]}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{\frac{41}{64}-u^2}} \quad (u = x+\frac{3}{8})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{8}{\sqrt{41}}\int \frac{du}{\sqrt{1-(\frac{8u}{\sqrt{41}})^2}} = \frac{4}{\sqrt{41}}\frac{\sqrt{41}}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t = \frac{8u}{\sqrt{41}},\ du = \frac{\sqrt{41}}{8}\,dt)$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C.$$

Kvadratno funkcijo pod korenom drugega od integralov v (19.13) lahko zapišemo kot $(x+\frac{b_1}{2})^2+c_1-\frac{b_1^2}{4}$. Kadar je $c_1-\frac{b_1^2}{4} > 0$ (kar pomeni, da ta kvadratna funkcija nima realnih ničel), lahko zapišemo $c_1-\frac{b_1^2}{4} = d^2$ za kak $d > 0$ in tedaj je

$$x^2+b_1x+c_1 = (x+\frac{b_1}{2})^2+d^2 = d^2[1+(\frac{x+\frac{b_1}{2}}{d})^2].$$

Zato lahko tedaj s substitucijo $t = \frac{x+\frac{b_1}{2}}{d}$ reduciramo prvi integral v (19.13) na integral $\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{arsh} t + C = \ln(t+\sqrt{1+t^2})+C$.

Zgled 19.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{x+1}{2})^2+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \quad (t = \frac{x+1}{2})$$

$$= \ln(t+\sqrt{t^2+1})+C = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C_1,$$

kjer je $C_1 = C - \ln 2$.

Kadar za koeficiente kvadaratne funkcije pod korenom drugega integrala v (19.13) velja $c_1 - \frac{b_1^2}{4} \leq 0$, kar pomeni, da ima realni ničli, imenujmo ju x_1, x_2, lahko integral izračunamo še na drugi način. Tedaj namreč lahko zapišemo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b_1 x + c_1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}}.$$

Če je $x_2 = x_1$, se lahko znebimo korena in integral je tedaj kar $\ln|x - x_1|$. Zato vzemimo sedaj, da je $x_2 \neq x_1$. Tedaj substitucija $t = \frac{x-x_2}{x-x_1}$ poenostavi integral.

Zgled 19.6. Vpeljimo v integral

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}\, dx$$

novo spremenljivko $t = \frac{x-2}{x-1}$, torej $x = \frac{t-2}{t-1}$ in $dx = \frac{dt}{(t-1)^2}$. Nadalje je $\sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{t(x-1)^2} = \sqrt{t}|x-1| = \frac{\sqrt{t}}{|t-1|}$. Za $t \geq 1$ dobimo tako

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t}(t-1)}.$$

V ta integral vpeljemo $t = s^2$, da dobimo

$$\begin{aligned} I = 2\int \frac{ds}{(s-1)(s+1)} &= \int [\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}]\, ds = \ln|\frac{s-1}{s+1}| + C \\ &= \ln|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}| + C = \ln|\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}}| + C \\ &= \ln|2x - 3 - 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}| + C. \end{aligned}$$

Na koncu omenimo, da ni mogoče integrala vsake elementarne funkcije izraziti z elementarnimi funkcijami. Npr. $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ je nova funkcija, imenovana *integralski sinus*. Prav tako integrala $\int \frac{e^x}{x}\, dx$ ni mogoče izraziti z elementarnimi funkcijami.

20. Izlimitirani integrali

20.1. Integrali oblike $\int_a^\infty f(x)\, dx$.

Definicija 20.1. Naj bo $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na vsakem končnem intervalu $[a, b]$, kjer je $a < b$. Če obstaja limita

$$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx \tag{20.1}$$

in je končna, pravimo, da je integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *konvergenten*, v nasprotnem primeru pa, da je *divergenten*. Podobno definiramo tudi $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ za funkcijo $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, ki je integrabilna na vsakem intervalu $[a, b]$ za $a < b$.

Zgled 20.2. (i) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^r} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^r} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1-r)x^{r-1}}|_1^b$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1-r)b^{r-1}} - \frac{1}{1-r} = \begin{cases} \frac{1}{r-1}, & \text{če je } r > 1, \\ \infty, & \text{če je } r < 1. \end{cases}$$

Ker je tudi

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty,$$

je integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^r}$ konvergenten natanko tedaj, ko je $r > 1$, in takrat je njegova vrednost $\frac{1}{r-1}$.

(ii) Za katere $c \in \mathbb{R}$ konvergira integral

$$I = \int_0^\infty e^{-cx}\, dx?$$

Za $c \neq 0$ imamo

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-cx}\, dx = -\frac{1}{c} \lim_{b\to\infty} e^{-cx}|_0^b = \frac{1}{c} \lim_{b\to\infty} (1 - e^{cb}) = \begin{cases} \frac{1}{c}, & \text{če je } c > 0; \\ \infty, & \text{ce je } c < 0. \end{cases}$$

Za $c = 0$ pa je $I = \int_0^\infty dx = \infty$. Torej integral konvergira natanko tedaj, ko je $c > 0$, in tedaj je njegova vrednost $I = \frac{1}{c}$.

(iii)$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x|_0^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$.

Naslednji izrek je analogen Cauchyevemu kriteriju za konvergenco vrst. V njem in njegovih posledicah bomo molče predpostavili, da je funkcija f integrabilna na vsakem končnem intervalu $[a, b]$, kjer bo a fiksen in $b > a$, $b \in \mathbb{R}$.

Izrek 20.3. *Integral*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx \tag{20.2}$$

je konvergenten natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\, dx| < \varepsilon \quad \text{za vsaka } b_2 > b_1 \geq M. \tag{20.3}$$

Dokaz. Predpostavimo, da je integral konvergenten in naj bo $I = \int_a^\infty f(x)\, dx$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$|\int_a^b f(x)\, dx - I| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall b \geq M.$$

Če sta torej $b_2 > b_1 \geq M$, potem je

$$|\int_a^{b_1} f(x)\, dx - I| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in} \quad |\int_a^{b_2} f(x)\, dx - I| < \frac{\varepsilon}{2},$$

od koder sledi

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\, dx| = |\int_a^{b_2} f(x)\, dx - \int_a^{b_1} f(x)\, dx| = |(\int_a^{b_2} f(x)\, dx - I) + (I - \int_a^{b_1} f(x)\, dx)|$$

$$\leq \left| \int_a^{b_2} f(x)\,dx - I \right| + \left| \int_a^{b_1} f(x)\,dx - I \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Predpostavimo sedaj še obratno, da je izpolnjen pogoj (20.3). Potem je zaporedje števil

$$I_n := \int_a^{a+n} f(x)\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Cauchyevo, saj za $n > m \geq M - a$ velja

$$|I_n - I_m| = \left| \int_a^{a+n} f(x)\,dx - \int_a^{a+m} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{a+m}^{a+n} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Zato je zaporedje (I_n) konvergentno, označimo z I njegovo limito. Pokazali bomo, da je $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = I$, torej, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $A \in \mathbb{R}$, da velja $|\int_a^b f(x)\,dx - I| < \varepsilon$ za vse $b \geq A$. Ker zaporedje (I_n) konvergira k I, obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da je

$$|I_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{če je } n \geq n_\varepsilon. \tag{20.4}$$

Po pogoju (20.3) (uporabljenem za $\frac{\varepsilon}{2}$ namesto ε) obstaja tak $N \in \mathbb{R}$, da je

$$\left| \int_{n+a}^{b} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kakor hitro je } b > n + a \geq N. \tag{20.5}$$

Izberimo poljuben $A \geq \max\{n_\varepsilon, N\} + a$. Potem za $b \geq A$ velja

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I \right| = \left| \left(\int_a^{n+a} f(x)\,dx - I \right) + \int_{n+a}^{b} f(x)\,dx \right| \leq |I_n - I| + \left| \int_{n+a}^{b} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

□

Definicija 20.4. Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ imenujemo *absolutno konvergenten*, če konvergira integral

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx.$$

Konvergenten integral, ki ni absolutno konvergenten, imenujemo pogojno konvergeneten.

Trditev 20.5. *Absolutno konvergenten integral je konvergenten.*

Dokaz. Če je integral $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergenten, po izreku 20.3 za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vsaka $b_2 > b_1 \geq M$ velja $\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon$. Tedaj velja tudi

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon,$$

zato je po izreku 20.3 integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergenten. □

Zgled 20.6. Pokazali bomo, da je integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{20.6}$$

pogojno konvergenten. Najprej pokažimo, da ni absolutno konvergenten. Za poljubna naravna $n > m$ je

$$\int_{m\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

$$\geq \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,dx = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi},$$

kjer smo uporabili, da je $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$ za vse $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ in $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$. Ker harmonična vrsta divergira, so vsote $\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ poljubno velike, če je n $(n > m)$ dovolj velik, pri še tako velikem m, zato gornja ocena pove, da ne more biti izpolnjen pogoj (20.3) iz izreka 20.3, torej integral (20.6) ni absolutno konvergenten.

Po drugi strani pa je

$$\int_{m\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx, \tag{20.7}$$

kjer je zadnja vsota del alternirajoče vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

katere členi padajo po absolutni vrednosti proti 0, kot bomo pokazali. Ker je taka vrsta konvergentna, gre izraz (20.7) proti 0, ko gre m proti ∞ (in je $n > m$), zato sedaj ni težko videti, da integral (20.6) zadošča pogoju (20.4) in je torej konvergenten. Pokazati moramo torej le še, da je $|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx| \geq |\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx|$ in, da ti integrali konvergirajo proti 0. Na intervalu $(k\pi, (k+1)\pi)$ ima funkcija sin konstanten predznak; recimo, da je pozitiven (kar pomeni, da je k sodo število in je na intervalu $((k+1)\pi, (k+2)\pi)$ funkcija sin negativna). Potem je

$$|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{(k+1)\pi}\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

$$= \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{-\sin x}{(k+1)\pi}\,dx \geq \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = |\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx|.$$

Podobno bi dokazali tudi za lihe k. Da gredo členi $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ proti 0, pa sledi iz ocene

$$|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx| \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}\,dx = \frac{2}{k\pi}.$$

Trditev 20.7. *Če je $|f(x)| \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, \infty)$ (kjer sta funkciji f in g integrabilni na intervalu $[a, b]$ za vsak končen $b > a$) in je integral $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ konvergenten, potem je integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ absolutno konvergenten.*

Dokaz. Iz ocene $\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx \le \int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx$, ki velja za poljubna $b_2 > b_1$, in konvergentnosti integrala $\int_a^\infty g(x)\,dx$ sledi po izreku 20.3, da je tudi integral $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergenten. □

20.2. **Integrali $\int_a^b f(x)\,dx$, kje funkcija f ni omejena.**

Definicija 20.8. Če je funkcija f integrabilna na vsakem podintervalu $[a, c]$ intervala $[a, b)$ $(c \in [a, b))$, in f v točki b morda niti ni definirana, lahko definiramo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx,$$

kadar ta limita obstaja. Takrat, kadar ta limita obstaja in je končna, pravimo, da je integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergenten*, v nasprotnem primeru pa *divergenten*. (Tukaj pomeni oznaka $c \to b^-$, da gre c proti b z leve strani, torej $c < b$)

Podobno lahko definiramo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

za funkcijo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, ki je integrabilna na vsakem podintervalu $[c, b]$ intervala $(a, b]$. Tudi pojem absolutno konvergentnega integrala lahko vpeljemo v tem kontekstu na očiten način in dokažemo trditve, analogne tistim iz prejšnjega podrazdelka za integrale tipa $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Vendar bomo to prepustili bralcem. Oglejmo si le zgleda.

Zgled 20.9. (i) $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^r}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \frac{1}{(1-r)x^{r-1}}\Big|_c^1$

$$= \lim_{c\to 0^+} [\frac{1}{1-r} - \frac{1}{(1-r)c^{r-1}}] = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & \text{če je } r < 1; \\ \infty, & \text{če je } r > 1. \end{cases}$$

Ker je tudi $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_0^1 = \infty$, je integral $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx$ konvergenten natanko tedaj, ko je $r < 1$. Takrat je njegova vrednost $\frac{1}{1-r}$.

(ii) $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 [x \ln x - x]_c^1 = \lim_{-c\to 0^+}(c \ln c - 1) = -1$. Tukaj smo uporabili dejstvo, da je $\lim_{c\to 0^+} c \ln c = 0$, ki sledi npr. z vpeljavo nove spremenljivke $t = -\ln c$:

$$-\lim_{c\to 0^+} c \ln c = \lim_{t\to\infty} e^{-t} t = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots} = 0.$$

Pri tem zadnja enakost sledi iz ocene $|\frac{t}{1+t+\frac{t^2}{2}+\dots}| \le |\frac{t}{\frac{t^2}{2}}| = \frac{2}{|t|}$.

Naloge. 1. Izračunajte $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$.

2. Naj bo $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ omejena zvezna funkcija. Dokažite, da je integral $\int_0^\infty \frac{g(x)}{1+x^3}\,dx$ absolutno konvergenten.

3. Ali je integral $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ konvergenten?

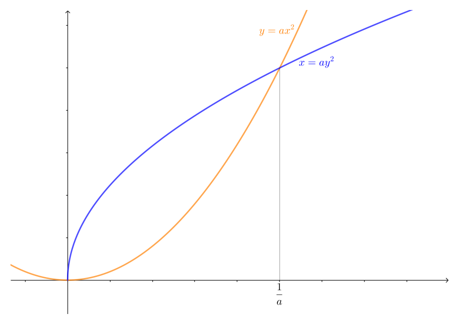
4. Naj polinom q nima nobene ničle na poltraku $[0, \infty)$ polinom p pa naj ima vsaj za 2 nižjo stopnjo od polinoma q. Dokažite, da je tedaj integral $\int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ konvergenten.

5. Kako je s konvergentnostjo integrala $\int_0^1 \ln^r x\,dx$?
6. Za katere a je konvergenten integral $\int_{-\infty}^0 2^{ax}\,dx$?
7. Ali je integral $\int_1^\infty \frac{dx}{\ln x}$ konvergenten?

21. Uporaba integrala

21.1. **Ploščine.** Integral lahko uporabimo za izračun ploščin ravninskih likov, ki niso nujno omejeni z grafom ene same funkcije in tremi daljicami.

Zgled 21.1. Izračunajmo ploščino lika, omejenega s parabolama $y = ax^2$ in $x = ay^2$, kjer je $a > 0$ konstanta.



Slika 39. Območje med parabolama

Paraboli se očitno sekata v točki $(0,0)$ in v še enem presečišču, ki ga dobimo kot drugo rešitev sistema enačb

$$y = ax^2, \quad x = ay^2.$$

Ko vstavimo y iz prve enačbe v drugo, dobimo $x = a^3x^4$. Poleg rešitve $x = 0$, je rešitetev te enačbe tudi $x = \frac{1}{a}$. Za $x \in [0, \frac{1}{a}]$ je $\sqrt{\frac{x}{a}} \geq ax^2$ (saj je $x \geq a^3x^4$), druga parabola torej nad prvo. Zato je ploščina lika med parabolama

$$p = \int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{x}{a}}\,dx - \int_0^{\frac{1}{a}} ax^2\,dx = [\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{2}{3}x^{3/2} - a\frac{x^3}{3}]_0^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{3a^2}$$

Naloga. Izračunajte ploščino elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

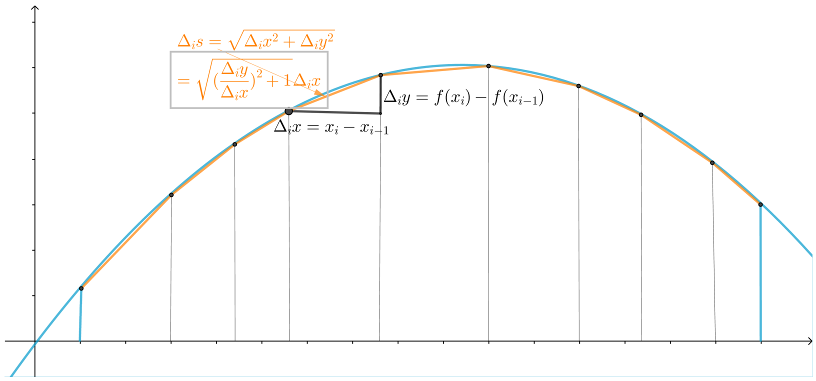
21.2. **Dolžina funkcijskega grafa.** Kako dolg je graf odvedljive funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$?

Da bi to ugotovili, razdelimo interval $[a,b]$ na dele z delilnimi točkami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

ter vsaki dve točki $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ in $(x_i, f(x_i))$ povežimo z daljico. Vsota dolžin vseh teh daljic je dober približek dolžine grafa, če je delitev P intervala $[a,b]$ dovolj drobna (tj. Δ_P dovolj majhen). Dolžina i-te daljice, imenujmo jo $\Delta_i s$, je

$$\Delta_i s = \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 + 1}\Delta_i x,$$



SLIKA 40. Aproksimacija dolžine grafa z lomljeno črto

kjer smo označili $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Po Lagrangeovem izreku je $\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = f'(\xi_i)$ za kak $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, torej je

$$\Delta_i s = \sqrt{f'(\xi_i)^2 + 1}\Delta_i x$$

. Vsota

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(\xi_i)^2 + 1}\Delta_i x$$

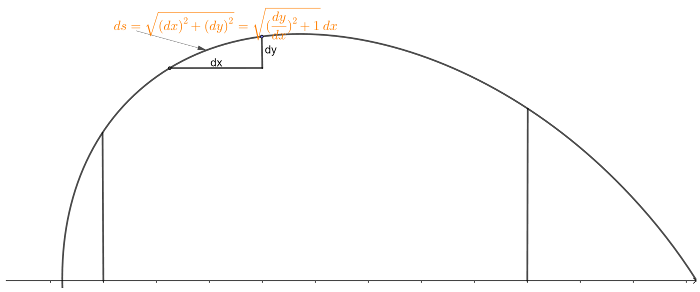
je približek dolžine grafa. Toda taka vsota je Riemannova vsota za funkcijo $g(x) := \sqrt{f'(x)^2 + 1}$ na intervalu $[a, b]$. Ko gre Δ_P proti 0, take vsote konvergirajo torej proti $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\,dx$, če je funkcija g integrabilna. Ta pogoj je izpolnjen npr., če ima odvod f' le končno mnogo točk nezveznosti. S tem smo "izpeljali" naslednjo formulo za dolžino s grafa funkcije f, ki ima odsekoma zvezen odvod:

$$s = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\,dx. \tag{21.1}$$

Besedo "izpeljali" smo postavili med narekovaja, ker bi stroga izpeljava zahtevala, da najprej strogo definiramo pojem dolžine grafa, kar pa bi bilo nekoliko zamudno. Namesto tega, lahko vzamemo formulo (21.1) kar za definicijo dolžine grafa, sklepanje, ki smo ga zabeležili pred njo, pa pove, da se ta definicija sklada z našim intuitivnim pojmom dolžine. Na kratko lahko izpeljavo formule za dolžino krivulje povzamemo takole: dolžina zelo majhnega dela krivulje je $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx$, dolžino celotne krivulje dobimo kot vsoto dolžin takih delov, ko limitiramo njihovo velikost proti 0. V limiti preide vsota v integral, zato velja (21.1).

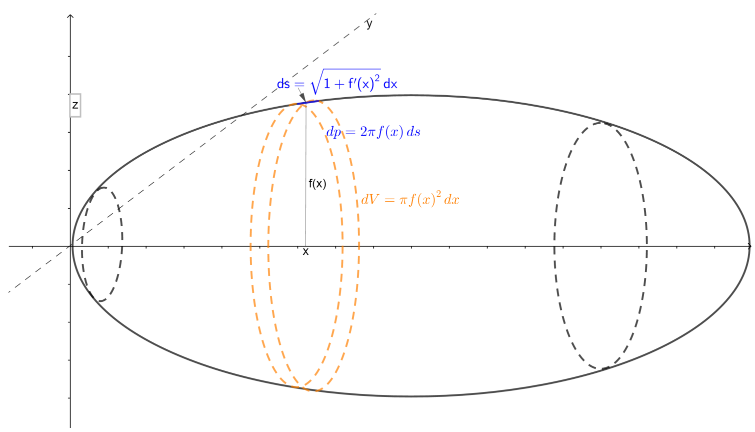
Zgled 21.2. Izračunajmo dolžino verižnice $f(x) = \operatorname{ch} x$ med točkama $a = 0$ in $b = 1$. Po (21.1) je

$$s = \int_0^1 \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}\,dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x|_0^1 = \operatorname{sh} 1 = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}).$$



Slika 41. Diferencial dolžine ravninske krivulje

21.3. **Prostornina in površina vrtenine.** Ko se graf zvezne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zavrti okrog abscisne osi za $360°$ opiše ploskev. Določili bomo površino te ploskve in prostornino telesa, ki ga omejuje (tj. prostornino telesa, ki ga opiše ravninski lik pod grafom funkcije). Telo razrežemo na zelo tanke plasti z ravninami, pravo-



Slika 42. Diferenciala prostornine in površine vrtenine

kotnimi na abscisno os. Vsaka taka plast je približno valj z zelo majhno višino dx in polmerom osnovne ploskve $f(x)$. Ploščina te osnovne ploskve je torej $\pi f(x)^2$, prostornina tega valja pa $\pi f(x)^2\, dx$. Prostornino celotnega telesa dobimo kot vsoto prostornin teh valjev, ko limitiramo njihove višine dx proti 0, s čimer vsota preide v integral $\int_a^b \pi f(x)^2\, dx$. S tem dobimo naslednjo formulo za prostornino vrtenine:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx. \tag{21.2}$$

Ko plašč tega "valja" prerežemo po tvorilki in razvijemo v ravnino, dobimo pravokotnik z osnovnico $2\pi f(x)$ in višino ds. (Da njegova višina ni dx temveč ds, spoznamo, če opazujemo funkcijo f z zelo strmim grafom.) Ploščina tega dela ploskve je torej $2\pi f(x)\,ds = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$, površina celotne ploskve pa

$$p = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{21.3}$$

Zgled 21.3. Koliko je prostornina in površina vrtenine, ki nastane, ko se del parabole $y = 1 + x^2$, $1 \le x \le 2$, zavrti okrog abscisne osi?

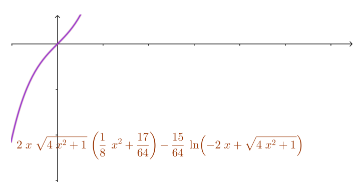
$$V = \pi \int_1^2 (1+x^2)^2\,dx = \frac{178}{15}\pi.$$

$$p = 2\pi \int_1^2 (1+x^2)\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Zadnji integral lahko izračunamo z vpeljavo nove spremenljivke t prek zveze $2x = \operatorname{sh} t$, s čimer sledi

$$p = 2\pi \int_{\operatorname{arsh} 2}^{\operatorname{arsh} 4} (1 + \frac{\operatorname{sh}^2 t}{4})\operatorname{ch} t \frac{1}{2}\operatorname{ch} t\,dt = \pi \int_{\operatorname{arsh} 2}^{\operatorname{arsh} 4} (1 + \frac{\operatorname{sh}^2 t}{4})\operatorname{ch}^2 t\,dt.$$

Sedaj bi lahko izrazili funkciji sh in ch z eksponentno funkcijo, nakar ne bi bilo težko integrirati, vendar pa bi to zahtevalo precej dela, ki nam ga lahko olajša računalnik. Povejmo le, da je približni rezultat 69.3.



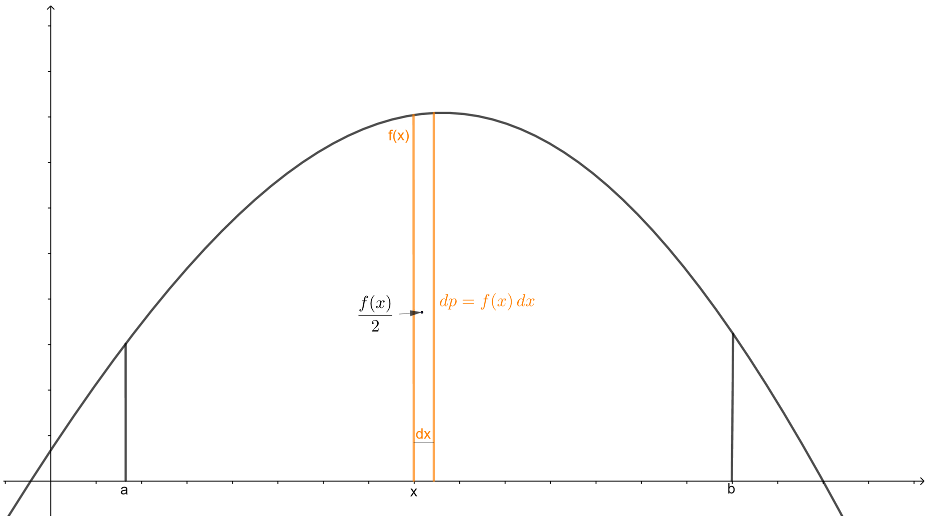
Slika 43. Integral $\int(1+x^2)\sqrt{1+4x^2}\,dx$, izračunan z geogebro

21.4. **Težišča ravninskih likov in krivulj.** Kako bi določili ordinato težišča ravninskega lika pod grafom funkcije $y = f(x)$, $a \le x \le b$? Predpostavili bomo, da je ploskovna gostota $\frac{dm}{dp}$ konstantna, tako da bomo pri računanju navora namesto teže upoštevali kar ploščino. Lik razdelimo na ozke vertikalne pasove s premicami $x =$konst., ki so približno pravokotniki. Ordinata težišča tipičnega takega pravokotnika je $\frac{f(x)}{2}$, njegov prispevek k navoru okrog osi x je torej produkt ploščine $dp = f(x)\,dx$ in ročice $\frac{f(x)}{2}$, se pravi

$$dM_x = \frac{f(x)^2}{2}\,dx.$$

Celotni navor okrog osi x je zato

$$M_x = \int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,dx.$$



SLIKA 44. Določitev težišča lika pod grafom funkcije $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

Po definiciji je težišče v taki točki (x_T, y_T), da je celotni navor okrog katerekoli osi enak produktu ploščine p in razdalje težišča do te osi. Torej velja

$$y_T p = M_x = \int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,dx,$$

od koder dobimo

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)^2\,dx}{2p}, \tag{21.4}$$

kjer je p ploščina lika, $p = \int_a^b f(x)\,dx$. Ker je $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$ prostornina vrtenine, ki nastane, ko se lik zavrti okrog osi x, lahko formulo (21.4) zapišemo kot $y_T = \frac{V}{2\pi p}$ oziroma:

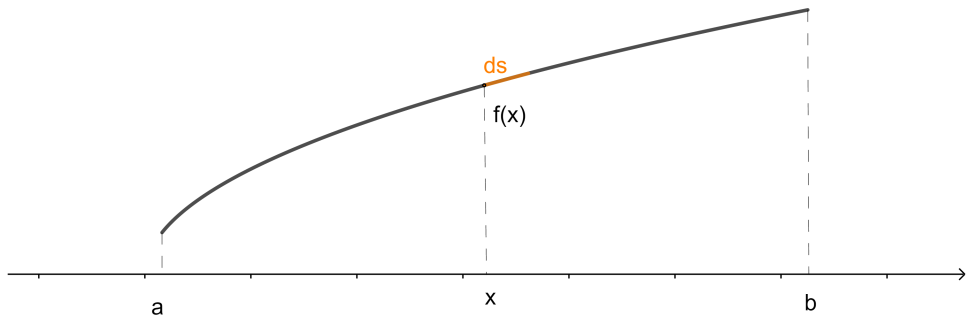
$$V = 2\pi y_T p. \tag{21.5}$$

V tej formuli pomeni izraz $2\pi y_T$ pot, ki jo pri zasuku za $360°$ opiše težišče. Da se dokazati, da velja ta formula za splošne ravninske like:

Trditev 21.4. *(Guldinovo pravilo) Prostornina vrtenine, ki nastane, ko se ravninski lik zavrti za polni kot okrog osi, ki ne seka lika, je enaka produktu ploščine lika in dolžine poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče lika.*

Naloga. Izpeljite formulo za absciso težišča ravninskega lika pod grafom funkcije $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Kako pa bi določili težišče krivulje $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$? Predpostavili bomo, da je dolžinska gostota $\frac{dm}{ds}$ konstantna, tako da bomo pri računanju navora namesto teže uporabili kar dolžino. Krivuljo razdelimo na majhne dele. Dolžina tipičnega



SLIKA 45. Navor krivulje okrog osi x je $M_x = \int_a^b f(x)\,ds$.

dela je ds, njegov navor okrog osi x pa $dM_x = f(x)\,ds = f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Celotni navor krivulje okrog osi x je zato

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Po definiciji težišča mor biti ta navor enak sy_T, kjer je y_T oordinata težišča, s pa dolžina krivulje, $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Od tod sledi

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{s}. \tag{21.6}$$

Ker je površina vrtenine, ki nastane, ko se krivulja zavrti za polni kot okrog osi x, enaka $p = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$, lahko formulo (21.6) zapišemo kot

$$p = 2\pi y_T s. \tag{21.7}$$

Tudi ta formula velja za splošnejše ravninske krivulje:

Trditev 21.5. *(Guldinovo pravilo) Površina vrtenine, ki nastane, ko se ravninska krivulja zavrti za polni kot okrog osi, ki ne seka krivulje, je enaka produktu dolžine krivulje in poti, ki jo pri zasuku opiše težišče krivulje.*

Zgled 21.6. Krog s polmerom a se zavrti za polni kot okrog osi, ki je oddaljena od središča kroga za b, kjer je $b > a$. Določite prostornino in površino tako nastalega svitka.

Ker je težišče kroga očitno v njegovem središču, je dolžina poti, ki jo opiše težišče, enaka $2\pi b$. Po Guldinovem pravilu je zato

$$V = p2\pi b = 2\pi^2 a^2 b.$$

Ker je tudi težišče krožnice v središču kroga, je po drugem Guldinovem pravilu površina svitka

$$p = s2\pi b = 2\pi a 2\pi b = 4\pi^2 ab.$$

Naloge. 1. Določite težišče polkroga $x^2+y^2 \leq a^2$, $y > 0$, ter težišče polkrožnice $x^2 + y^2 = a^2$, $y > 0$.

2. Koliko je ploščina elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$?

3. Določite težišče homogenega stožca.

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani